

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA EL MDVRPPC MULTIOBJETIVO QUE CONSIDERA
COSTO E IMPACTO AMBIENTAL.

ALEJANDRO OSPINA CASTAÑO

Programa de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingenierías
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Pereira, 2018



ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA EL MDVRPPC MULTIOBJETIVO QUE CONSIDERA
COSTO E IMPACTO AMBIENTAL.

Presentado por:
Alejandro Ospina Castaño

presentado como requisito
para optar al título de
Ingeniero electricista

Director:
Ph.D.Ramon Alfonso Gallego Rendón

Programa de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingenierías
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Pereira, 2018



Jurado evaluador 1: MAURICIO GRANADA ECHEVERRY

Jurado evaluador 2: JHON JAIRO SANTA CHÁVEZ

DEDICATORIA

Este logro se lo quiero dedicar a mis padres Luz Dary Castaño Ospina y Luis Carlos Ospina Giraldo, quienes son mi gran motivación y la principal razón para este maravilloso proyecto de vida.

AGRADECIMIENTOS

- A mis padres Luz Dary Castaño Ospina y Luis Carlos Ospina Giraldo, quienes con su apoyo incondicional, se han encargado de guiarme ética y moralmente en el sendero de la vida y la educación.
- Agradecerle infinitamente al ingeniero Ramon Alfonso Gallego Rendón y a la ingeniera Eliana Miredy Toro Ocampo, quienes fueron mis guías principales en este proyecto investigativo, y en especial, agradecerles por la gran ayuda que ambos me brindaron.
- A mis hermanos Angélica Ospina y Carlos Andres Bedoya, quienes siempre me interpelaban con la frase "*¿Cómo va con el proyecto Alejo?*", ante lo cual siempre respondía "*!Pues ahí vamos!*"
- A mis amigos de carrera David Danilo, Freddy Hincapie, Cesar Duarte, Miguel Escobar, Samir, etc. y en especial a Marcela Lopez, quien siempre me animó a seguir y no desistir

Índice

Índice	6
Índice de figuras	8
Índice de cuadros	8
1. Introducción	12
1.1. Introducción	12
1.2. Objetivos	15
1.3. Metodología	15
1.4. Justificación	16
2. Descripción del problema	17
2.1. El problema de ruteo de vehículos capacitado CVRP	17
2.2. El problema de ruteo abierto de vehículos OVRP	18
2.3. El problema de ruteo vehiculos con múltiples depósitos MDVRP	20
2.4. El problema de ruteo abierto de vehículos con múltiples depósitos MDOVRP	22
2.5. El problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos que considera flota propia y subcontratada MDVRPPC	23
2.6. Emisiones contaminantes en el problema de ruteo	25
3. Modelo matemático para el problema de ruteo verde G-MDVRPPC	27
3.1. Comparación entre las redes de distribución de energía eléctrica y las redes de transporte .	27

3.2. Modelamiento del problema de ruteo radial multi-depósito considerando flota propia y subcontratada (MDVRPPC)	29
3.3. Modelo de impacto ambiental (cálculo del consumo de combustible)	38
4. Solución del problema multi-objetivo GMDVRPPC	42
4.1. Definición de la optimización multi-objetivo	42
4.1.1. Método de epsilon constraint para la solución de problemas multi-objetivo	43
4.1.2. Solución al problema multi-objetivo GMDVRPPC utilizando el método ε -restricciones (<i>epsilon constraint</i>)	45
5. Análisis de sensibilidad de la función objetivo emisión de partículas respecto al estado de la vía, pendiente y superficie.	45
5.1. Factores de sensibilidad de la función objetivo impacto ambiental	46
5.1.1. Cálculo de la distancia de acuerdo a la pendiente	47
5.1.2. Cálculo de la distancia virtual teniendo en cuenta el relieve del arco	50
6. Resultados y análisis	61
6.1. Análisis de resultados	80
7. Conclusiones, recomendaciones y trabajos futuros	84
7.1. Trabajos futuros	85
8. Bibliografía	87
Referencias	87

Índice de figuras

1.	Aproximación gráfica del problema CVRP	18
2.	Aproximación gráfica del problema OVRP	20
3.	Aproximación gráfica del problema MDVRP	21
4.	Aproximación gráfica del problema MDOVRP	23
5.	Aproximación gráfica del problema MDVRPPC	24
6.	Sistema uni-nodal generador-carga	29
7.	Fuerzas actuando sobre el vehículo.	38
8.	Corrección de distancia d_{ij} por efecto pendiente	47
9.	Valores típicos de g para diferentes pendientes	48
10.	Pendiente longitudinal de un arco ij	52
11.	Perfil longitudinal de una ruta entre i y j	52
12.	Perfil longitudinal de rutas, extraídas de Gárdenas Grisales (2013).	58
13.	Rutas de los puntos MIN-MAX a 0° , 5° , 10° y 20° (caso 20 clientes 4 depósitos).	81
14.	Rutas de punto MIN-MAX a 15° (caso 20 clientes 4 depósitos).	81
15.	Rutas del punto MIN-MAX a 0° (caso 30 clientes 4 depósitos).	83
16.	Rutas de los puntos MIN-MAX a 5° , 10° y 15° (caso 30 clientes 4 depósitos).	83
17.	Rutas del punto MIN-MAX a 20° (caso 30 clientes 4 depósitos).	84

Índice de cuadros

1.	Clasificación de las superficies	51
----	--	----

2.	Valores típicos del inverso de coeficiente de tracción.	57
3.	Resultados del GMDVRPPC-20 clientes	64
4.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes cero grados	65
5.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes cinco grados	66
6.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes diez grados	68
7.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes quince grados	69
8.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes veinte grados	70
9.	Resultados del GMDVRPPC-30 clientes	72
10.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes cero grados	74
11.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes cinco grados	75
12.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes diez grados	77
13.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes quince grados	78
14.	Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes veinte grados	80

Resumen

Actualmente, las empresas de transporte y entrega de mercancía se enfrentan a un problema de logística que deben solucionar, teniendo en cuenta la cantidad de usuarios que deben ser atendidos, los tiempos de entrega y la minimización de costos asociados a la gestión de operación. Un incremento de la gestión operativa obliga a las compañías a incrementar la capacidad de las flotas y la construcción de nuevos centros de distribución que le permita generar rutas mas cortas para poder atender de manera mas eficiente la demanda total. Así, se origina el problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos, denominado en la literatura especializada como MDVRP (por sus siglas en ingles, *Multi Depot Vehicle Routing Problem*).

Suele suceder que algunas empresas optan por recurrir a terceros para subcontratar una cantidad adecuada de vehículos, bien sea por el limite de vehículos propios, o por cuestiones de salida a mantenimiento de un tamaño importante de las flotas. En esa dirección, el numero de flotas subcontratadas por las compañías generan costos adicionales en la gestión de operación debidos a los valores de arrendamiento por cada flota. De esa manera, surge entonces una nueva variante poco conocida en la literatura denominada como el problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos, que considera flota propia y subcontratada, denominada en algunos textos como MDVRPPC (Por sus siglas en ingles, *Multi Depot Vehicle Routing Problem With Private Fleet and Common Carrier*).

Uno de los temas mas relevantes y de gran impacto social es el tema de impacto ambiental, y en especial gracias a que el sector de transporte es el mas responsable entre todos los agentes potenciales existentes. De esa forma, las empresas de transporte han tenido que involucrar el tema de impacto ambiental como nuevo objetivo dentro de la cadena de suministros (cadena verde). Así, nace una nueva variante al problema de ruteo MDVRPPC, denominada en la literatura como G-MDVRPPC.

En esta investigación se define un modelo matemático exacto para el GMDVRPPC, el cual surge de la comparación de la operación de las redes de transporte de carga con las redes de distribución de energía eléctrica. El modelo planteado es del tipo bi-objetivo, que considera costo operativo e impacto ambiental. Al objetivo de impacto ambiental se le efectúa un análisis de sensibilidad variando los coeficientes asociados a la emisión de partículas, y consiste en estudiar diferentes grados de pendiente y estado de la vía. El modelo planteado es codificado en lenguaje AMPL y resuelto usando un algoritmo exacto de programación lineal entera mixta con el software CPLEX. Finalmente son usadas instancias de la literatura para llevar a cabo un análisis de resultados, con el fin de establecer el mejor modo de operación que relaciona el número de

vehículos y tiempo de entrega de acuerdo a la inclinación y estado de la vía.

1. Introducción

1.1. Introducción

Desde que la globalización dió su primer pie de fuerza a finales de la guerra fría, y mas aun en plena mitad del siglo XIX, las economías locales de países tercermundistas empezaron a verse fuertemente influenciadas por las economías de capital de países desarrollados. Desde entonces el auge de las multinacionales y el gran flujo de capital extranjero permitieron reescribir un nuevo concepto sobre la teoría de mercado y la macro-economía.

Gracias al proceso dinámico de la globalización en cuanto a la integración de los mercados locales y participación activa de economías competitivas, los procesos de consumo han incrementado y ha permitido que tanto países desarrollados como en vía de desarrollo hayan podido mejorar la inversión en desarrollo sostenible, educación, transporte, entre otros. De esa manera se ha permitido integrar nuevos conceptos sobre el planeamiento territorial y desarrollo sostenible, y en esa dirección, el tema de transporte juega un papel relevante por su influencia en ambos temas.

El ordenamiento territorial obliga a las empresas de transporte y entrega de mercancía el accionar de técnicas que permitan minimizar costos operativos ya que la gestión operativa de vehículos y las acciones de logística son los ejes centrales en los procesos de comercialización y entrega de bienes o servicios. Lo anterior se denomina ruteo de vehículos, y fue expuesto por primera vez en [Dantzig and Ramser \(1959\)](#), en el que se introducen las primeras soluciones razonables para el problema de despacho de camiones de carga. Posteriormente, este apartado pasará a llamarse el problema de ruteo de vehículos (VRP, por sus siglas en ingles *Vehicle Routing Problem*) [Toth and Vigo \(2002\)](#).

Una de las desventajas del área de transporte tiene que ver con los efectos secundarios ligados a la contaminación del medio ambiente, ya que es la que mas contribuye con la emisión de gases de efecto invernadero como el CO_2 .

Existen numerosas aplicaciones de problema de ruteo enfocadas a la parte de entrega de mercancía. Sin embargo pueden encontrarse otras aplicaciones que incluyen:

- Generación de sistemas de rutas en industrias de desechos sólidos.

- Distribución de bebidas, alimentos, productos lácteos, periódicos.
- Estaciones de bomberos.
- Construcción de redes de comunicación.
- Gasolineras.
- Localización de centrales.
- Ruteo de documentos clasificados de las fuerzas armadas.
- Planeación y operación logística militar.
- Instalación de centrales de incineración de basuras y ruteo de recolección de estas.
- Cadena de suministros de maderas.
- Distribución de repuestos de vehículos.
- Distribución de cadena de supermercados.
- Entre otros.

Gracias a que el VRP se modela como un grafo geométrico débilmente conexo $G(v, n)$ (siendo v el número de vértices del problema, y n el número de ramas que interconectan los vértices), este se puede solucionar matemáticamente como un problema de cartero viajante en donde el objetivo principal es lograr que un cartero ubicado en una ciudad X pueda repartir el producto a diferentes ciudades, de tal manera que la distancia viajada entre cada ciudad sea la mínima, [Toro-ocampo \(2016\)](#).

Para las soluciones del VRP se encuentran las técnicas heurísticas como alternativa para problemas combinatorios considerables, caracterizadas porque sus soluciones suelen ser muy cercanas al óptimo global y se dan en tiempos muy razonables. Muchas de estas técnicas utilizadas para resolver los VRP, o sus variantes, suelen basarse en métodos de búsqueda local, los cuales a partir de una solución inicial permutan a soluciones de muy buena calidad.

El incremento en la gestión operativa, obliga a la instalación de nuevos centros de distribución para el abastecimiento de la demanda, y por consiguiente nace el problema de ruteo capacitado multi-depósito

MDVRP [Cordeau et al. \(1997\)](#). En esta variante puede darse el caso de que parte del tamaño de la flota sea insuficiente para cubrir la demanda, por lo que se hace necesario alquilar o subcontratar parte de esta, y de esa manera se obtiene el problema de ruteo multi-depósito con flota propia y subcontratada MDVRPPC. En el MDVRPPC se tiene el inconveniente de modelar los costos asociados al alquiler de los vehículos ya que ello depende de las características del mismo y de los términos y condiciones de la compañía arrendataria. Sin embargo, en [Toro-Ocampo et al. \(2016\)](#) se soluciona el problema con un factor que penaliza los costos por el uso de flota subcontratada.

Dentro del problema de gerenciamiento y cadena de suministros, el impacto ambiental ha tomado una relevancia importante debido a los altos índices de contaminación que ocasionan las grandes industrias por el alto uso de combustibles fósiles, y es por eso que ha entrado como objetivo adicional dentro de las labores de logística en el tema transporte. El problema de ruteo que considera impacto ambiental se denomina ruteo verde [Erdoğan and Miller-Hooks \(2012\)](#) y se puede modelar mono-objetivamente o multi-objetivamente dependiendo de los objetivos en conflicto.

Dentro de las aplicaciones del problema de ruteo, hay muy pocas relacionadas a las condiciones del terreno y estado de la vía. En [Tavares et al. \(2008\)](#) se hace una consideración sobre la pendiente y estado de la vía a partir de un software de computación GIS3D aplicado al problema de recogida de desechos sólidos. La ventaja de considerar variaciones en la vía radica en la exactitud del problema, y además permite analizar el comportamiento en la operación de los vehículos.

En esta investigación, se estudia el problema de ruteo verde con múltiples depósitos que considera flota propia y subcontratada (GMDVRPPC, por sus siglas en inglés *Green Multi Depot Vehicle Routing Problem with Private Fleet and Common Carrier*). En este problema se minimizan costos operativos y el número de emisiones de gas efecto invernadero CO_2 debido al uso de combustibles fósiles. Posteriormente, se implementa un análisis de sensibilidad a partir de las variaciones en las condiciones del terreno y la inclinación de la superficie, que influyen en el costo operativo y el impacto ambiental. Se toman instancias de la literatura para verificar la validez del modelo matemático. La estructura de esta tesis está compuesta por la introducción en el capítulo 1, descripción del problema en el capítulo 2, definición del modelo matemático en el capítulo 3, solución del modelo matemático en el capítulo 4, análisis de sensibilidad y cálculo de distancia equivalente en el capítulo 5, resultados y análisis de resultados en el capítulo 6 y conclusiones, recomendaciones y trabajos futuros en el capítulo 7.

1.2. Objetivos

Objetivo general

Efectuar un análisis de sensibilidad para el problema de ruteo verde multi-depósito con flota propia y subcontratada (G-MDVRPPC), considerando diferentes grados de inclinación y estados de la vía.

Objetivos específicos

- Estado del arte sobre el MDVRPPC y estudio de modelos matemáticos de impacto ambiental.
- Definir un modelo matemático para el problema de ruteo verde GMDVRPPC radial.
- Plantear el modelo para diferentes grados de inclinación que vayan de 0° a 20° , y estados de la vía para las instancias de 20 y 30 clientes.
- Programar el modelo en AMPL (*A Mathematical Programming Language*) y solucionarlo a través del software comercial CPLEX.
- Análisis de resultados.
- Redacción del documento final.

1.3. Metodología

- Construcción del estado del arte a partir de las investigaciones hechas sobre los problemas de ruteo CVRP, MDVRP, OVRP y MDOVRP y los temas relacionados al consumo de combustible.
- Hacer un análisis de las redes de distribución de energía eléctrica con base al documento [Lavorato et al. \(2012\)](#), y trabajar el modelo matemático bi-objetivo radial para el GMDVRPPC expuesto en [Toro-ocampo \(2016\)](#). Para validar el modelo matemático se trabajan instancias de [Cordeau et al. \(1997\)](#).
- Adecuar el modelo de impacto ambiental según inclinación y estado de la vía.

- Programación del modelo anterior en AMPL y solución del modelo utilizando el CPLEX, cuyo método exacto de solución se basa en la utilización del método de Branch and Cut (el cual combina el método del Branch and Bound y el método de planos de corte). Luego se obtiene un frente de Pareto a partir del método epsilon constraint, el cual se basa en restringir un objetivo, a causa de que el otro pueda ser minimizado.
- Una vez obtenido cada frente de Pareto, se aplica la métrica MIN, MAX [Lopez et al. \(2011\)](#), para determinar el mejor punto de cada frente. Posteriormente se lleva a cabo un análisis de resultados para determinar las factibilidades o inviabilidades con respecto al costo operativo y el impacto ambiental para la entrega de mercancía.
- Se redacta un documento final de la investigación llevada a cabo.

1.4. Justificación

El problema de distribución de mercancías corresponde a una situación de gestión de operaciones que debe ser resuelta por la mayoría de empresas que requieren entregar sus productos a almacenes, centros de distribución o clientes finales. Cuando ocurre un incremento en la gestión operativa aparece el problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos, además cuando dentro de la promesa de venta se consideran tiempos de entrega razonables, es necesario ubicar centros de distribución adicionales que generen rutas más cortas. El aumento de la demanda o la salida a reparación de la flota de vehículos genera la necesidad de ampliar el tamaño de estos y considerar la subcontratación de una parte de la operación. La sostenibilidad de las organizaciones corresponde a un indicador de interés tanto para las directivas de las organizaciones así como para los usuarios finales. Es por eso que cualquier solución que se proponga además de minimizar costos operativos debe minimizar efectos contaminantes producto de su fabricación o comercialización.

Dentro del proceso de minimización de efectos contaminantes se deben resolver dos preguntas, la primera es ¿Cómo se minimizan? y la segunda es ¿Cuanto cuesta reducir el impacto generado por los vehículos de combustión interna?

El modelamiento de las vías incide sobre la operación de los vehículos, por lo que en el diseño de modelos para el problema de ruteo es necesario constituir herramientas de trabajo que permitan simular el estado de la vía. En esa dirección esta investigación ofrece una herramienta de estudio para simular de manera

aproximada la pendiente y el estado de la vía, tal que permita analizar los riesgos de un "trade-off" entre costo operativo e impacto ambiental

2. Descripción del problema

2.1. El problema de ruteo de vehículos capacitado CVRP

El CVRP es una extensión potenciada del VRP tradicional [Toth and Vigo \(2002\)](#), debido a que en este tipo de problema se incluyen por primera vez restricciones de capacidad asociadas a la carga del vehículo y la capacidad del centro de distribución. En el CVRP se parte de un único depósito I y una cantidad J de clientes que deben ser atendidos por una serie de flotas que deben iniciar en el centro de distribución.

En esta variante se debe considerar:

1. Visitar cada cliente una única vez.
2. Respetar la capacidad del depósito y de los vehículos.
3. Todos los vehículos utilizados en la operación deben retornar al centro de distribución.
4. Minimizar los costos de la operación.

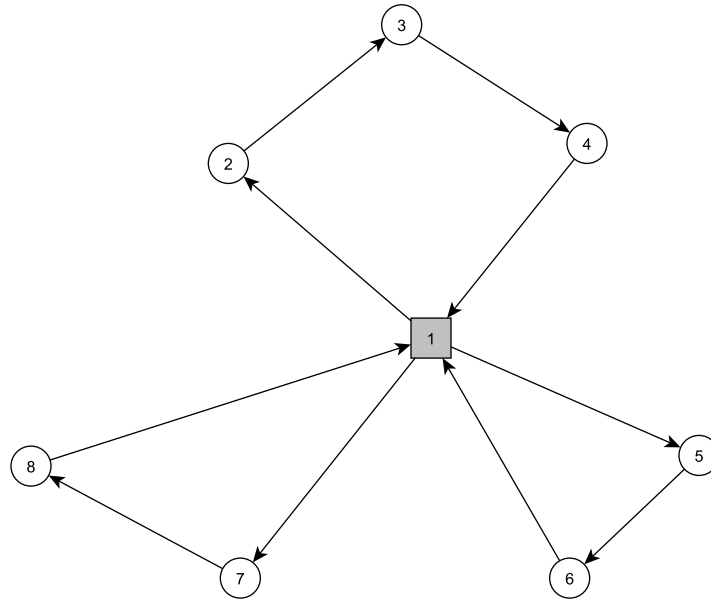


Figura 1: Aproximación gráfica del problema CVRP

2.2. El problema de ruteo abierto de vehículos OVRP

El problema de ruteo abierto de vehículos OVRP (*Open Vehicle Routing Problem*) es poco frecuente en la literatura especializada. Si bien, en la variante presentada en la subsección 2.1 los vehículos usados en el ruteo se consideran propios ya que poseen retorno al depósito. En el caso del problema del OVRP las flotas parten del depósito I pero estas no regresan al centro de distribución asociado.

El porque las flotas no regresan al centro de distribución se debe a que los vehículos utilizados son subcontratados [Toro-Ocampo et al. \(2016\)](#), [Soto et al. \(2017\)](#). La justificación al uso de este tipo de flotas se debe a que en algún momento dado la empresa transportadora podría sacar de operación una parte importante de flotas, lo que la obliga a recurrir a terceros para alquilar un tamaño adecuado de flotas necesarias para la operación. Otra de las causas para subcontratar un tamaño de flota se puede dar por la falta de vehículos propios que posee la compañía para la operación debido al incremento en la gestión de operación.

El OVRP es considerado combinatorialmente como NP hard al ser una variante del VRP capacitado, en donde los vehículos utilizados en el ruteo terminan su recorrido con el último cliente que es atendido y no

regresan al centro de distribución asociado.

En la mayoría de los casos, esta variante suele ser resuelta mediante técnicas heurísticas gracias a que las soluciones suelen ser de buena calidad y dadas en tiempos razonables. En [Fu et al. \(2005\)](#) se propone una heurística de búsqueda tabú para el OVRP, en la que se pretende encontrar el conjunto de rutas que minimizan el costo operativo (numero de vehiculos usados) formulado con una escala de penalización equivalente a la de [Brandão \(2004\)](#) y que depende de la distancia del arco. En [Sariklis and Powell \(2000\)](#) se propone un heurística basada en el árbol de expansión mínimo con procedimiento de penalidades para resolver el problema capacitado de ruteo abierto. El algoritmo se define como un método secuencial de dos fases bajo el criterio agrupar primero rutear después, y cada fase está compuesta por etapas que permiten mejorar la eficiencia de la heurística. [Fleszar et al. \(2009\)](#) Proponen una heurística de búsqueda efectiva de vecindario variable para el OVRP, en la que el vecindario se basa en una inversión de segmentos de ruta y el intercambio de segmentos entre rutas. Los resultados obtenidos son comparables a los de [Li et al. \(2007\)](#) y [Fu et al. \(2005\)](#), y mejores que los obtenidos por [Sariklis and Powell \(2000\)](#). En [Li et al. \(2007\)](#) se hace un repaso del OVRP y se desarrolla una variante del algoritmo de viaje *record – to – record*. [Brandão \(2004\)](#) Proponen un algoritmo heurístico de búsqueda tabú que explora la estructura del problema y al final se compara con una heurística desarrollada por los mismos autores.

En el caso de las técnicas exactas, [Letchford et al. \(2007\)](#) proponen un algoritmo branch and cut para el OVRP, el cual combina dos algoritmos exactos que son el branch and bound y el de planos de corte. Se demuestra que el OVRP no es una variante inferior del CVRP ya que en el proceso de programación entera y la formulación de planos de corte necesitan ser modificados de manera muy sutil. Los resultados obtenidos son comparables a los de [Brandão \(2004\)](#), [Fu et al. \(2005\)](#) y [Li et al. \(2007\)](#).

El OVRP se representa geométricamente como un grafo orientado débilmente conexo tal y como se muestra en la figura.

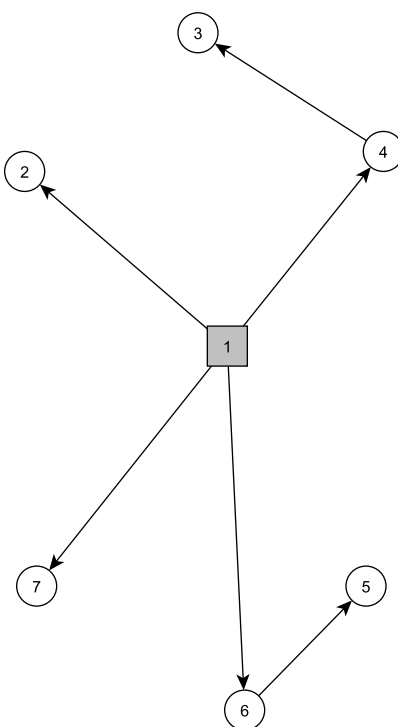


Figura 2: Aproximación gráfica del problema OVRP

2.3. El problema de ruteo vehiculos con múltiples depósitos MDVRP

El problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos MDVRP (*Multi Depot Vehicle Routing Problem*) es una variante del VRP capacitado, dado por el incremento en la gestión de operación. En el MDVRP se posee un número finito y razonable de centros de distribución I cuyas ubicaciones son conocidas, y un conjunto de clientes J que deben ser atendidos por un numero limitado de flotas que salen y regresan al depósito del que iniciaron.

El MDVRP es combinatorialmente NP hard ya que es una variante del VRP capacitado, y en su solución se suelen usar técnicas heurísticas. [Ho et al. \(2008\)](#) proponen dos algoritmos genéticos híbridos (HGA, por sus siglas en ingles *Hybrid Genetic Algorithm*) para dar solución al MDVRP. En el primer algoritmo se da un conjunto de soluciones iniciales aleatorias, y en el segundo se incorpora el método de ahorro de Clarke y Wright y la heurística del vecindario mas cercano para dar la inicialización del proceso. Finalmente se lleva a cabo un estudio computacional con diferentes casos de prueba, arrojando al segundo algoritmo con

las mejores características en cuanto a tiempo de entrega. [Surekha and Sumathi \(2011\)](#) Implementan un algoritmo genético para solucionar el MDVRP bajo el criterio agrupar primero asignar después. El método de agrupamiento utilizado es el de Clarke y Wright y como resultado se obtienen soluciones en tiempos razonables comparables a las de la literatura especializada.

Dentro de las técnicas exactas para solucionar el MDVRP, [Contardo and Martinelli \(2014\)](#) emplean un algoritmo exacto formulado a partir del flujo vehicular y un conjunto de partida. Se demuestra que el limite inferior formulado con la etapa de flujo vehicular elimina las fronteras no promisorias, tal que se reduce la complejidad del sub-problema de precios formulado por el conjunto de partida. Los resultados obtenidos son comparables a los de la literatura y se muestra una mejoría en el limite inferior de la solución para ciertas instancias.

El MDVRP se puede describir geoméricamente a través del siguiente grafo completo.

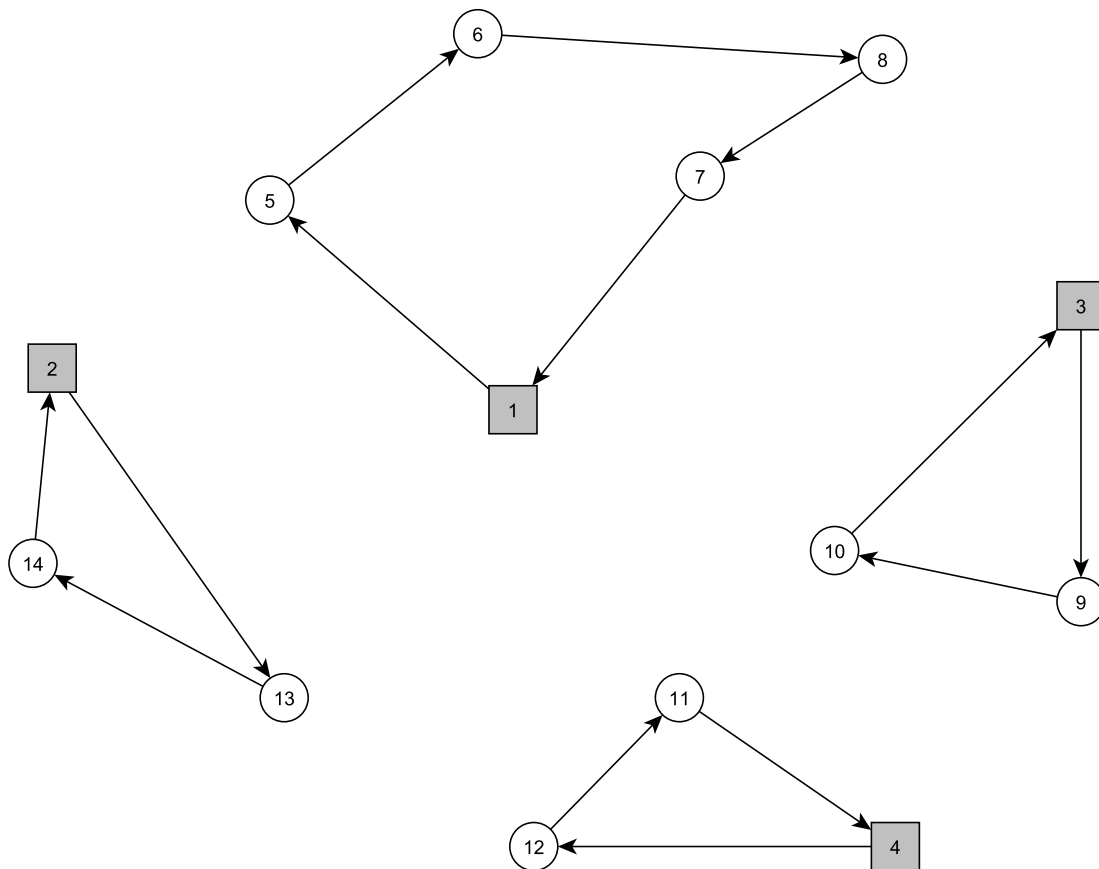


Figura 3: Aproximación gráfica del problema MDVRP

2.4. El problema de ruteo abierto de vehículos con múltiples depósitos MDOVRP

El problema de ruteo abierto de vehículos con múltiples depósitos MDOVRP (*Multi Depot Open Vehicle Routing Problem*) es una extensión del problema abierto OVRP y una variante del MDVRP por lo que es computacionalmente NP hard [Wang et al. \(2016\)](#), [Pichka et al. \(2014\)](#), dado por el incremento de la gestión operativa en cuanto al numero de centros de distribución.

Dentro de la cadena de suministros, suele ser muy común contratar cierta cantidad de flotas para poder tener mayor cobertura en la operación de logística [Tarantilis et al. \(2005\)](#). Desde el año 2000, se han reforzado las técnicas heurísticas para dar soluciones contundentes a las variantes abiertas. En [Liu et al., 2014](#) se propone una algoritmo genético mejorado para encontrar las rutas que minimizan los costos de viaje. [Soto et al. \(2017\)](#) establecieron dos metas para dar solución al MDOVRP, la primera fue el desarrollo exitoso de una técnica híbrida que combina una estrategia de búsqueda tabú y búsqueda de vecindario múltiple, y en la segunda se alcanzó un punto integrado y unificado de cadenas de inyección que permiten tratar de manera simple varios vecindarios a la vez, y finalmente se exponen una serie de resultados que superan los BKS de la literatura especializada. Sin embargo, [Lalla-Ruiz et al. \(2016\)](#) implementan una técnica lineal entera mixta basada en un algoritmo branch and bound cuya solución es comparable con [Liu et al., 2014](#).

Existen variantes en las que se combina el uso de flotas propias y flotas subcontratadas, conocidas también como variantes híbridas [Toro-ocampo \(2016\)](#). Estas variantes suelen incurrir en una complejidad computacional mucho mayor debido las diferencias de costo entre ambos tipos de vehículos y a la robustez matemática en cuanto a las restricciones que crean arcos de retorno para aquellas flotas que son propias. Para flotas subcontratadas es usual hacer el proceso de alquiler a través de un arrendamiento tipo leasing que usualmente se cobra mes a mes sobre activos fijos tales como autos, edificaciones entre otros. El cobro de alquiler es dado a través de un valor actual neto que el tercero recibe por el vehículo [Trigeorgis and Mason \(1987\)](#). Pese a la complejidad de modelar ua función de costo para vehículos subcontratados, [Toro-ocampo \(2016\)](#) y [Toro-Ocampo et al. \(2016\)](#) proponen que para cada arco recorrido por una flota subcontratada se duplique el costo asociado, de tal manera que se reduzca la complejidad matemática y el esfuerzo computacional.

El MDOVRP se puede describir como grafo orientado débilmente conexo tal y como se aprecia en la figura:

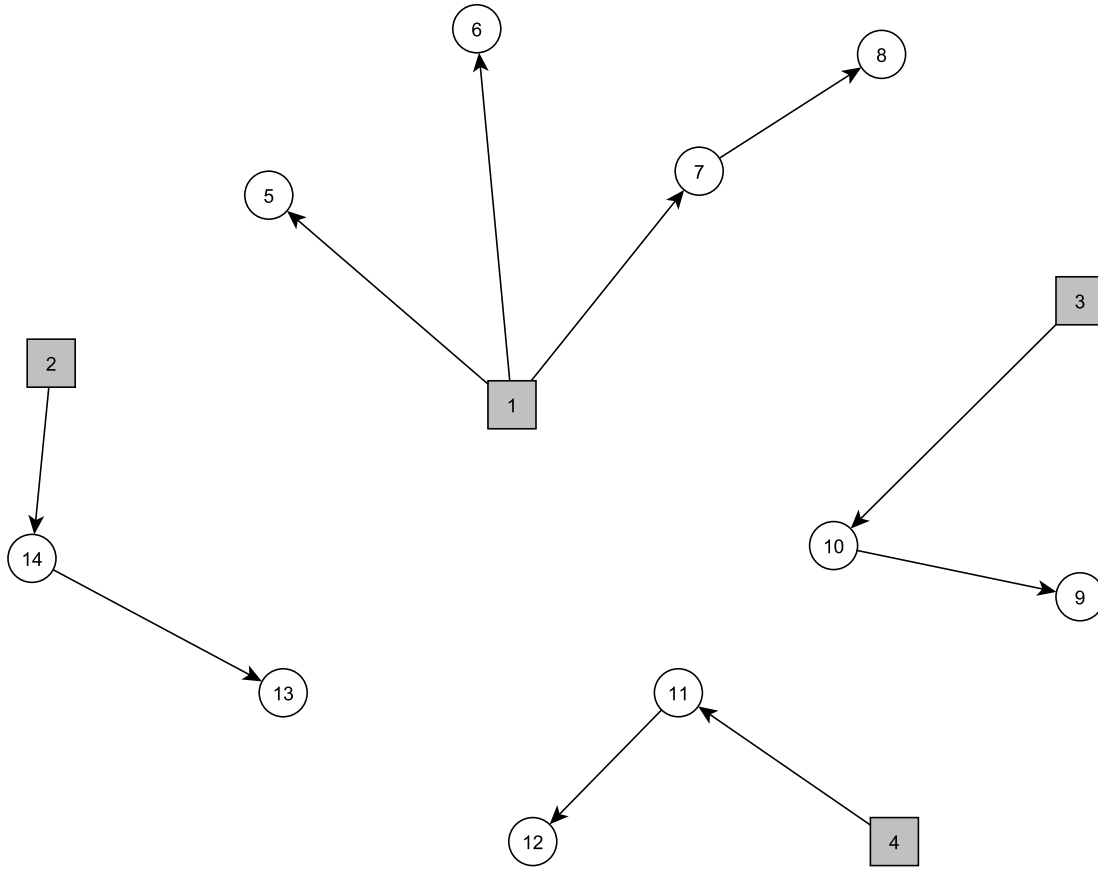


Figura 4: Aproximación gráfica del problema MDOVRP

2.5. El problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos que considera flota propia y subcontratada MDVRPPC

El problema de ruteo con múltiples depósitos que considera flota propia y subcontratada MDVRPPC (*Multi Depot Vehicle Routing Problem With Private Fleet and Common Carrier*) es una variante híbrida obtenida al combinar el MDVRP y el MDOVRP, por lo que geométricamente se representa como un grafo doble. El MDVRPPC es combinatorialmente NP hard ya que es una abstracción mucho mas compleja del VRP capacitado tradicional.

Aunque no se tienen amplios registros literarios del MDVRPPC, en [Toro-ocampo \(2016\)](#) y [Toro-Ocampo et al. \(2016\)](#) se proponen soluciones razonables del problema por medio de una técnica exacta. En el

MDVRPPC se posee un conjunto finito de depósitos I abiertos para la operación, y un numero definido de clientes J que deben ser atendidos por una serie de flotas bien sea propias o subcontratadas., y para su solución se debe considerar que:

1. Cada flota propia inicia en un depósito I_m y termina su recorrido con un arco de retorno al mismo depósito I_m del cual partió.
2. Cada flota subcontratada inicia su ruta en un centro de distribución I_m y finaliza su recorrido con el último cliente atendido, ante lo cual no hay arco de retorno.
3. Cada centro de distribución y vehículo usado en la operación está sujeto a restricciones de capacidad.

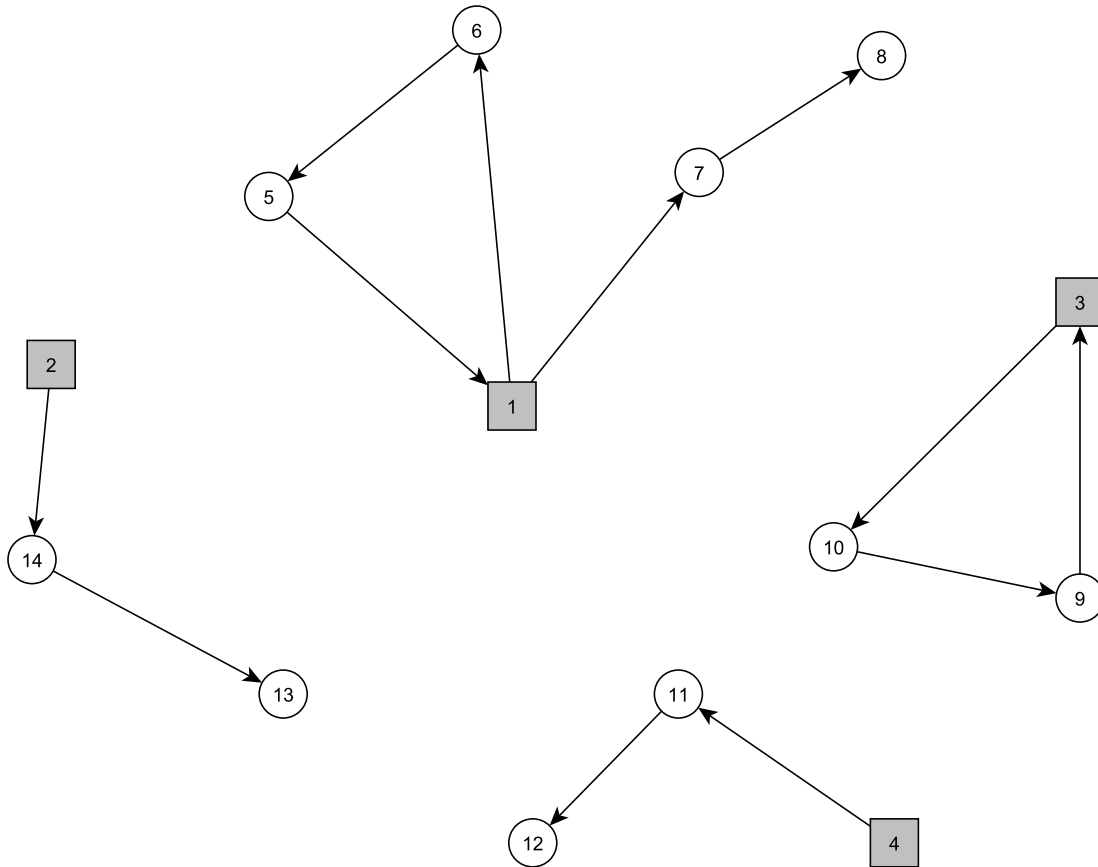


Figura 5: Aproximación gráfica del problema MDVRPPC

2.6. Emisiones contaminantes en el problema de ruteo

El tema de impacto ambiental en el siglo XXI ha concentrado tanto interés que ha entrado como nueva tendencia en la línea de cadena de suministros para el desarrollo sostenible. El área de transporte es la que toma mayor responsabilidad en el tema, ya que es la más representativa en la emisión de GHG (*GreenHouse Gasses*) (Gang et al. (2016), Romilly (1999)) por el uso de combustibles fósiles Bektas and Laporte (2011), Erdoğan and Miller-Hooks (2012), Hao et al. (2016). El dióxido de carbono CO_2 representa el 22 % del total de agentes potenciales registrados durante el año 2004 según informes emitidos por el instituto de recursos mundiales. Países como los Estados Unidos, Reino Unido y China son los mayores responsables del cambio climático pese a su modelo de cadena de suministros, pues informes emitidos por la US EPA y la Oficina Nacional de Estadísticas acuerdan que durante el año 2008 y 2010 dichos países han venido representando en el sector de transporte el 28 %, 21 % y 32 % de participación en el proceso ya nombrado.

Gracias a las exigencias en cuanto a la reducción de GHG, las empresas en su línea de cadena de suministros han decidido exaltar el tema de desarrollo sostenible con la incorporación del impacto ambiental como nuevo objetivo en la gestión de operación de vehículos de motores de combustión interna. Así, las firmas enfrentan dos objetivos los cuales son la minimización de costos en su línea de logística, y la reducción de partículas contaminantes debidas a los procesos de producción y comercialización. Con lo anterior se da paso al problema de ruteo de vehículos que considera efectos contaminantes.

El problema de ruteo de vehículos que considera efectos contaminantes puede ser formulado como un problema mono-objetivo o bi-objetivo dependiendo del tipo de consideración que se haga para reducir los GHG. Algunas de las consideraciones más importantes son Toro-ocampo (2016):

- El peso del vehículo.
- Velocidad y aceleración del vehículo.
- Condiciones climáticas, que inciden directamente sobre el tipo de combustible utilizado.
- El tipo de combustible utilizado, pues el consumo de combustible es directamente proporcional a la cantidad de partículas de CO_2 emitidas al ambiente, y además, dependiendo del tipo de combustible usado el número de emisiones cambia, por ejemplo el diesel normal emite $2.82 KgCO_2/litro$, y el diesel ultra bajo en sulfuro una cantidad de $2.57 KgCO_2/litro$ Toro O. et al. (2015).

- Nivel de congestión: En general las emisiones de CO_2 dependen de la conducción. Mas frecuencia de paradas implica mas gasto de combustible, mientras que una velocidad de viaje promedio ininterrumpida conlleva a menos gasto [Toro-ocampo \(2016\)](#).
- Geometría de la vía como curvas, pendientes, glorietas y semáforos.

Debido a las consideraciones anteriores, surgen entonces distintos modelos de ruteo con impacto ambiental. Por ejemplo [Bektas and Laporte \(2011\)](#) implementa un VRP capacitado con función integrada de costo-impacto conocido como el problema de ruteo contaminante (PRP, por sus siglas en ingles *Pollutant Routing Problem*). La función de costo-impacto es obtenida a partir de una ecuación lineal que depende de la velocidad, el peso y la distancia viajada por el vehículo. Adicionalmente, la función adiciona términos constantes relacionados a las condiciones del terreno y el tipo de combustible usado.

El problema de ruteo con emisiones contaminantes es también conocido como el problema de ruteo verde [Toro-ocampo \(2016\)](#) y en particular se suele identificar al comienzo del acrónimo con una letra G mayúscula. [Galindres Guancha et al. \(2015\)](#) Proponen una técnica híbrida de solución para el G-CVRP mediante la secuencia de rutear primero asignar después, en donde la función objetivo es de peso-distancia viajada la cual funciona como un indicador de impacto ambiental. En [Toro-Ocampo et al. \(2016\)](#) se plantea un modelo bi-objetivo para el problema de localización y ruteo con flota propia y subcontratada GCLRPPC. El modelo matemático se plantea de tal manera que a través de modificaciones en las restricciones se obtienen variantes como MDVRPPC y CVRPPC y la función de impacto se modela a través de un estudio de fuerzas en equilibrio y en función de la carga transportada por el vehículo y la distancia viajada. [Bektas and Laporte \(2011\)](#) Plantean un modelo matemático integrado para el GVRP en el que la función objetivo es de costo-impacto que está en función de la distancia viajada por el vehículo. El modelo incluye centros de abastecimiento, mediciones de nivel de combustible, tiempos de llegada y medición de consumo.

Además de modelar impacto en función de distancia y peso, en [Gang et al. \(2016\)](#) se plantea y soluciona un VRP con múltiples recogidas y entregas considerando ventanas de tiempo (VRP-SPDTW) a través de un algoritmo genético mejorado. La función objetivo en cuestión se conoce como función integrada de costo-impacto ambiental e incluye dentro de sus variables de decisión el consumo de combustible y emisiones de CO_2 dependiendo del tipo de combustible usado. [Kuo \(2010\)](#) Plantea y soluciona a través de un SA o recocido simulado un VRP, en el que la función de impacto ambiental depende del tiempo, la velocidad, la cantidad de viajes por vehículo y el peso de la flota. El problema se denomina como TDVRP por sus siglas

en ingles (*Time Dependent Vehicle Routing Problem*) por la dependencia que posee la función objetivo del tiempo. En [Wyatt et al. \(2014\)](#) se plantea un sistema de medida de emisiones que permite establecer la cantidad de partículas de CO_2 en un periodo de 48 vueltas a partir de una simulación tridimensional en el software GIS3D el cual permite obtener un promedio en el gradiente de elevación de la superficie.

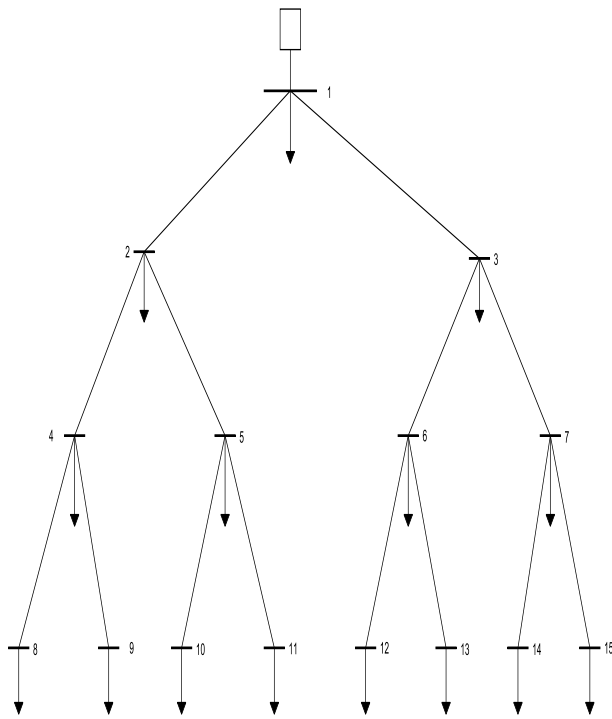
3. Modelo matemático para el problema de ruteo verde G-MDVRPPC

El modelo matemático para el problema de ruteo verde con múltiples depósitos considerando flota propia y subcontratada es planteado como un problema bi-objetivo el cual contempla la reducción de costos operativos e impacto ambiental. El primer objetivo es modelado como un TSP modificado lineal entero mixto, y el segundo se define con base al consumo de combustible. Para su solución se implementa una técnica exacta lineal entera mixta y un método de solución multi-objetivo, en donde el primero consiste en un algoritmo híbrido Branch and Cut binario, y el segundo es el método de *Epsilon Constraint* aplicado a problemas multi-objetivo.

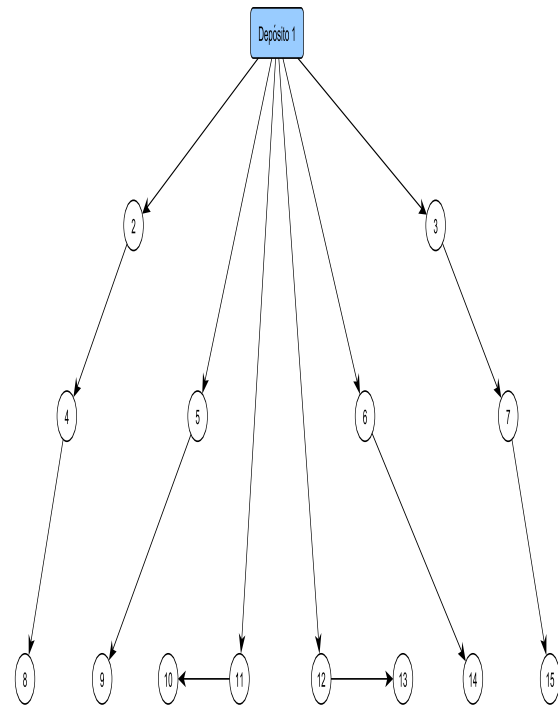
3.1. Comparación entre las redes de distribución de energía eléctrica y las redes de transporte

Las redes de transporte poseen características topográficas y operativas similares a las de una red de distribución de energía eléctrica. Dichas semejanzas pueden ser vistas desde la característica de radialidad y de balance nodal que ambas redes poseen

En la siguiente figura se ilustra la topología de ambas redes.



Red de distribución $\downarrow = \text{carga}$



Red de transporte de carga OPEN

La característica de radialidad en una red de distribución se define así:

$$\text{numero de ramas}(L) = \text{numero de nodos}(N) - 1 \quad (3.1)$$

Balance nodal

De acuerdo a la figura anterior, el balance nodal se define como:

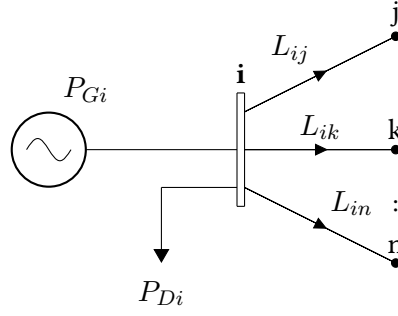


Figura 6: Sistema uni-nodal generador-carga

Donde:

- P_{Gi} : Potencia generada en el nodo i
- P_{Di} : Potencia Demandada en el nodo i
- L_{in} : Flujo de potencia que va de i a n

$$P_{Gi} = P_{Di} + \sum_{n \in \Omega_k} L_{in} \quad (3.2)$$

Ω_k representa el conjunto de nodos con lo cuales el nodo i posee conexión física a través de líneas de distribución.

En esa dirección se plantea un modelo radial que contempla las ecuaciones 3.1 y 3.2 como las restricciones de partida del modelo, asumiendo que las líneas de distribución se modelan como arcos, las cargas como clientes y los nodos de generación como centros de distribución.

3.2. Modelamiento del problema de ruteo radial multi-depósito considerando flota propia y subcontratada (MDVRPPC)

El modelamiento matemático del MDVRPPC toma como referencia la analogía de las redes de distribución y las redes de transporte [Lavorato et al. \(2012\)](#). El modelo parte de la restricción de radialidad descrita

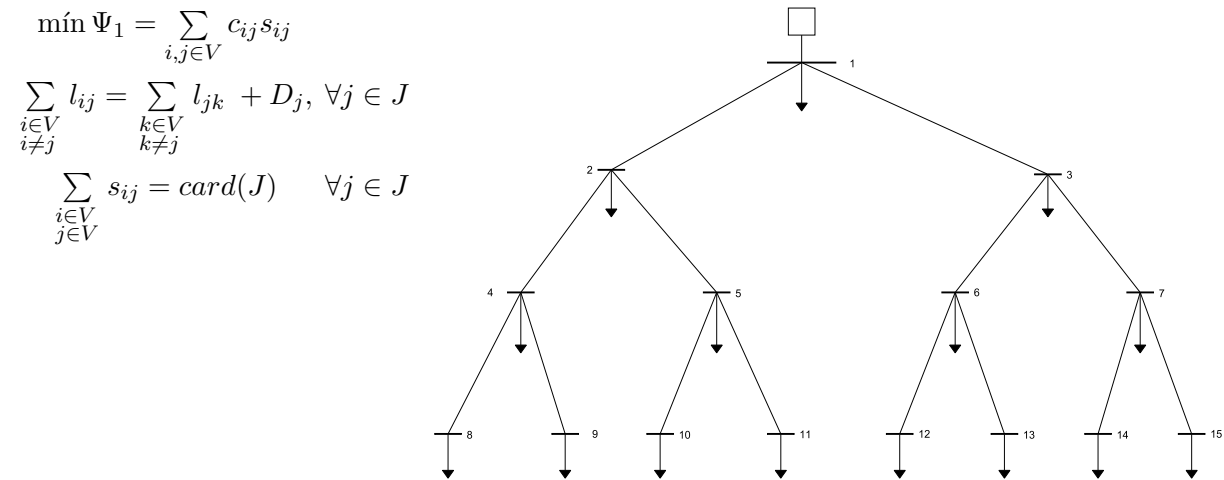
como numero de ramas igual al numero de nodos menos 1, y la restricción de balance nodal, las cuales caracterizan la topología inicial de la red.

El MDVRPPC posee las siguientes características:

1. Cada flota inicia en un centro de distribución I .
2. Cada flota propia usada en la operación deberá regresar el depósito del cual inició su ruta.
3. Cada flota subcontratada usada en la operación finaliza su ruta con el último nodo o cliente atendido.
4. No se debe exceder la capacidad del vehículo y de cada depósito.
5. Cada nodo debe ser de grado 2, es decir, se entra y se sale una sola vez (a excepción de los depósitos y los nodos terminales de flota subcontratada que siempre son de grado 1).

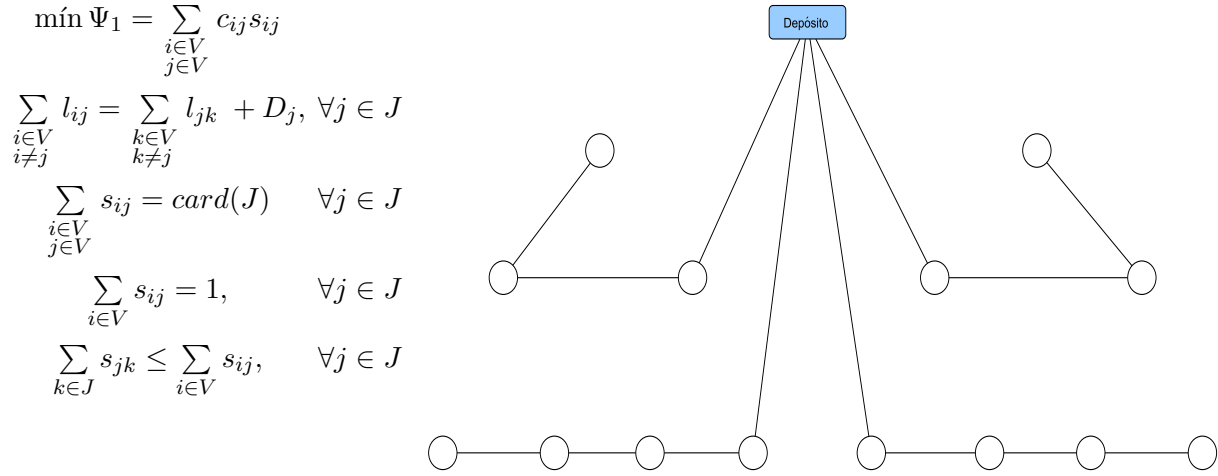
La descripción base para el modelo matemático del MDVRPPC se explica en cuatro etapas.

Etapla 1: base del modelo matemático extraído de [Lavorato et al. \(2012\)](#) (topología tipo árbol)



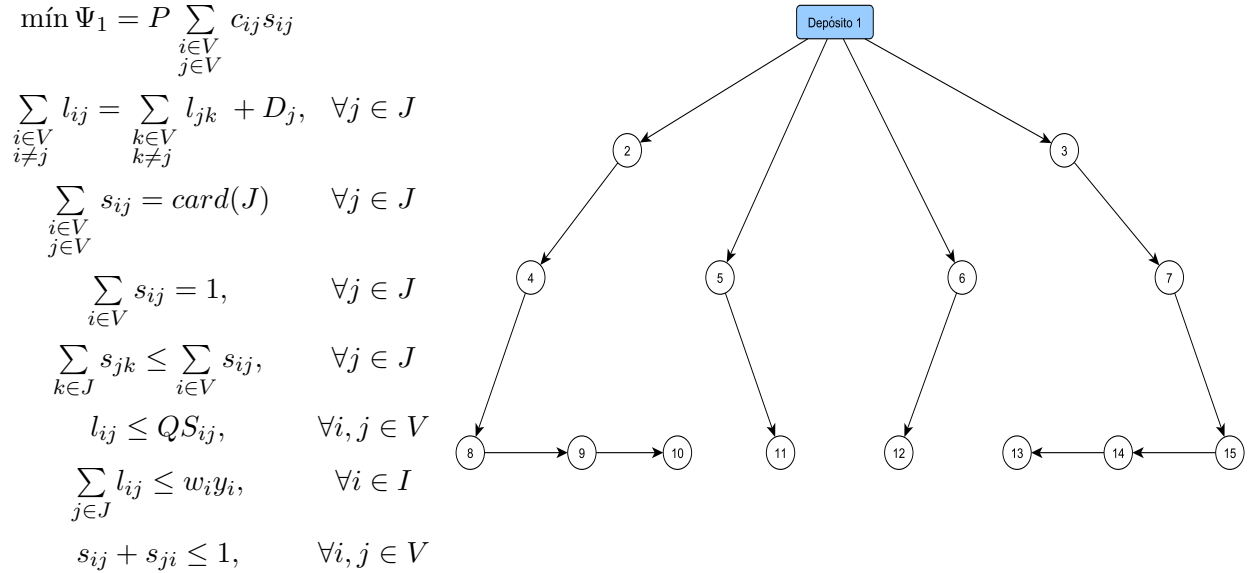
Siendo $I = \{1\}$ como única subestación y $J = \{2, 3, \dots, 15\}$ un conjunto de 14 nodos y $V = I \cup J$. De esa manera son obtenidas rutas radiales que no forman trayectorias cerradas. Sin embargo se generan algunos nodos con grado mayor a 2.

Etapla 2: Si se adiciona restricción de grado al modelo anterior (topología arborescente)...



En esta etapa se siguen generando rutas radiales y se obtienen nodos con grado menor o igual a 2 (a excepción del depósito). El modelo anterior es conocido como el modelo básico del problema de ruteo abierto sin restricciones de capacidad y sin restricción de dirección.

Etapla 3: Penalizando los costos c_{ij} y añadiendo restricciones de capacidad al modelo anterior y dirección...

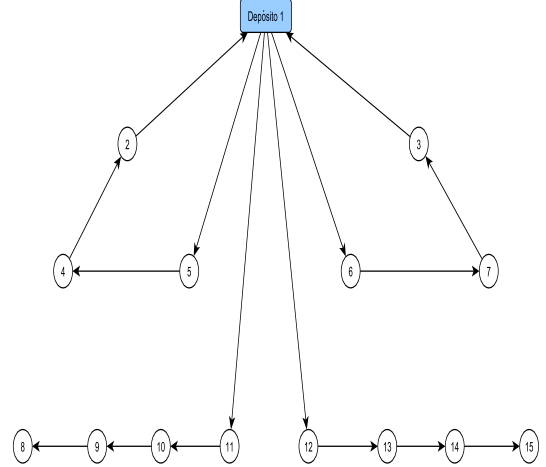


Siendo $I = \{1\}$ como único depósito y $J = \{2, 3, \dots, 15\}$ un conjunto de 14 clientes y $V = I \cup J$. Se obtiene un problema de ruteo capacitado abierto definido por un grafo orientado débilmente conexo. El modelo de esta etapa es denominado modelo radial base del problema de ruteo capacitado sin considerar

limite en el numero de vehículos.

Etapla 4: Añadiendo vehículos propios con arcos de retorno al modelo anterior

$$\begin{aligned}
 \text{mín } \Psi_1 &= \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij} a_{ij} + P \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} c_{ij} s_{ij} \\
 \sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} t_{ij} + l_{ij} &= \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq j}} (t_{jk} + l_{jk}) + D_j, & \forall j \in J \\
 \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} x_{ij} + s_{ij} &= \text{card}(J) & \forall j \in J \\
 \sum_{i \in V} x_{ij} + \sum_{i \in V} s_{ij} &= 1, & \forall j \in J \\
 \sum_{k \in J} x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij} &= \sum_{i \in V} x_{ij}, & \forall j \in J \\
 \sum_{j \in J} x_{ij} &= \sum_{j \in J} a_{ij}, & \forall i \in I \\
 \sum_{k \in J} s_{jk} &\leq \sum_{i \in V} s_{ij}, & \forall j \in J \\
 t_{ij} &\leq Q x_{ij}, & \forall i, j \in V \\
 l_{ij} &\leq Q s_{ij}, & \forall i, j \in V \\
 \sum_{j \in J} t_{ij} + l_{ij} &\leq w_i y_i, & \forall i \in I \\
 x_{ij} + x_{ji} + s_{ij} + s_{ji} &\leq 1, & \forall i, j \in V
 \end{aligned}$$



Siendo $I = \{1\}$ como único depósito y $J = \{2, 3, \dots, 15\}$ un conjunto de 14 clientes y $V = I \cup J$. Se obtiene un problema de ruteo capacitado híbrido definido por un grafo orientado débilmente conexo. El modelo de esta etapa es denominado modelo radial de ruteo capacitado con flota propia y subcontratada (CVRPPC) sin considerar limite en el numero de vehículos.

Modelo general del CVRPPC

El modelo del CVRPPC es complementado añadiendo al modelo de la etapa 4 restricción en el número de flotas, restricción de recurso en la conexión de cliente con demanda e identificación del nodo final respectivamente.

$$\begin{aligned}
\min \Psi_1 = & \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij} a_{ij} + P \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} c_{ij} s_{ij} \\
& \sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} t_{ij} + l_{ij} = \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq j}} (t_{jk} + l_{jk}) + D_j, \quad \forall j \in J \\
& \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} x_{ij} + s_{ij} = \text{card}(J) \quad \forall j \in J \\
& \sum_{i \in V} x_{ij} + \sum_{i \in V} s_{ij} = 1, \quad \forall j \in J \\
& \sum_{k \in J} x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij} = \sum_{i \in V} x_{ij}, \quad \forall j \in J \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} = \sum_{j \in J} a_{ij}, \quad \forall i \in I \\
& \sum_{k \in J} s_{jk} \leq \sum_{i \in V} s_{ij}, \quad \forall j \in J \\
& t_{ij} \leq Q x_{ij}, \quad \forall i, j \in V \\
& l_{ij} \leq Q s_{ij}, \quad \forall i, j \in V \\
& \sum_{j \in J} t_{ij} + l_{ij} \leq w_i y_i, \quad \forall i \in I \\
& x_{ij} + x_{ji} + s_{ij} + s_{ji} \leq 1, \quad \forall i, j \in V \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} + s_{ij} \leq \sum_{j \in J} D_j / Q, \\
& \sum_{i \in I} f_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J \\
& f_{ij} \geq x_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \\
& \sum_{i \in V} s_{ij} + \sum_{k \in V} x_{jk} = 1 - z_j, \quad \forall j \in J
\end{aligned}$$

Modelo del MDVRPPC

El modelo matemático del problema de ruteo multi-depósito considerando flota propia y subcontratada (MDVRPPC) es explicado en [Toro-ocampo \(2016\)](#) y planteado con base al modelo de la etapa 4 el cual se complementa añadiendo un numero definido de depósitos y de vehículos propios y un conjunto de restricciones recursivas que identifican a través de la red los nodos terminales de flota propia para trazar

los arcos de retorno a los depósitos de inicio de ruta. El problema se formula como un problema lineal entero mixto, el cual es definido por las ecuaciones ((3.3))-((3.30)).

Nodos	
I	Conjunto de centros de distribución (depósitos)
J	Conjunto de clientes
V	Conjunto de nodos $V = I \cup J$

Parámetros	
O_i	Costo de apertura del centro de distribución. i
W_i	Capacidad del centro de distribución. i
F	Costo fijo asociado a cada vehículo propio utilizado en la operación.
Q	Máxima carga que puede ser transportada por un vehículo.
D_j	Demanda de cada cliente $j \in J$
c_{ij}	Costo de viajar entre los nodos i y j
P	Factor de penalización aplicado a cada arco cuando es transitado usando un vehículo subcontratado.
NV_a	Número de vehículos disponibles.

Variables

x_{ij}	Variable binaria que se activa cuando el camino entre los nodos $i, j \in V$ es recorrido por un vehículo propio.
s_{ij}	Variable binaria que se activa cuando el camino entre los nodos $i, j \in V$ es recorrido por un vehículo sucontratado.
y_i	Variable binaria que indica la apertura del centro de distribución. $i \in I$
f_{ij}	Variable binaria que define si el consumidor ubicado en el nodo $j \in J$ es atendido por una ruta que inicia en el centro de distribución $i \in I$.
z_j	Variable binaria que determina si el consumidor ubicado en el nodo $j \in J$ es el último de la ruta en atendido.
a_{ij}	Variable binaria que indica si el vehículo usa el camino desde el nodo j al centro de distribución ubicado en el nodo i .
t_{ij}	Variable continua que indica la cantidad de carga transportada entre los nodos recorridos por la flota propia i y j
l_{ij}	Variable continua que indica la cantidad de carga transportada entre los nodos recorridos por la flota subcontratada i y j

$$\text{mín } \Psi_1 = \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij} a_{ij} + P \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} c_{ij} s_{ij} \quad (3.3)$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} + \sum_{i \in V} s_{ij} = 1, \quad \forall j \in J \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \in J} x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij} = \sum_{i \in V} x_{ij}, \quad \forall j \in J \quad (3.5)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = \sum_{j \in J} a_{ij}, \quad \forall i \in I \quad (3.6)$$

$$\sum_{k \in J} s_{jk} \leq \sum_{i \in V} s_{ij}, \quad \forall j \in J \quad (3.7)$$

$$x_{ij} + x_{ji} + s_{ij} + s_{ji} \leq 1, \quad \forall i, j \in V \quad (3.8)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} t_{ij} + l_{ij} = \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq j}} (t_{jk} + l_{jk}) + D_j, \quad \forall j \in J \quad (3.9)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} x_{ij} + s_{ij} = \text{card}(J), \quad \forall j \in J \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in I} f_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J \quad (3.11)$$

$$t_{ij} \leq Qx_{ij}, \quad \forall i, j \in V \quad (3.12)$$

$$l_{ij} \leq QS_{ij}, \quad \forall i, j \in V \quad (3.13)$$

$$\sum_{j \in J} t_{ij} + l_{ij} \leq w_i y_i, \quad \forall i \in I \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in V} s_{ij} + \sum_{k \in V} x_{jk} = 1 - z_j, \quad \forall j \in J \quad (3.15)$$

$$1 + a_{ij} \geq f_{ij} + z_j, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.16)$$

$$-(1 - x_{ju} - x_{uj}) \leq f_{ij} - f_{iu}, \quad \forall i \in I, \forall j, u \in V \quad (3.17)$$

$$f_{ij} - f_{iu} \leq (1 - x_{ju} - x_{uj}), \quad \forall i \in I, \forall j, u \in V \quad (3.18)$$

$$f_{ij} \geq x_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.19)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \geq \sum_{j \in J} D_j / \sum_{i \in I} w_i, \quad \forall i \in I \quad (3.20)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} + s_{ij} \leq \sum_{j \in J} D_j / Q, \quad (3.21)$$

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{ij} \leq NV_a, \quad (3.22)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V \quad (3.23)$$

$$s_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V \quad (3.24)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I \quad (3.25)$$

$$f_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in V \quad (3.26)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad (3.27)$$

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.28)$$

$$t_{ij} \in R, \quad \forall i, j \in V \quad (3.29)$$

$$l_{ij} \in R, \quad \forall i, j \in V \quad (3.30)$$

La ecuación 3.3 minimiza los costos operativos asociados al recorrido de cada arco por flota propia y subcontratada. 3.4 Obliga a que cada cliente sea visitado una sola vez por flota propia o subcontratada. Si un cliente es visitado por flota propia, entonces se debe salir del mismo con flota propia según 3.5. La restricción 3.6 obliga a que el número de vehículos propios que salen de cada depósito sea igual al número de vehículos propios que llegan a cada depósito. Si un cliente es visitado por flota subcontratada, entonces se debe salir del mismo con flota subcontratada siempre y cuando este no sea un nodo final según 3.7. En 3.8 se obliga a que cada vehículo viaje en una sola dirección sin considerar la asimetría de la ruta. La restricción 3.9 o de balance nodal, afirma que la sumatoria de carga que entra a un nodo debe ser igual a la suma de la carga que sale del nodo y la que se queda allí. 3.10 Impone la característica de radialidad que posee la red de transporte. 3.11 Garantiza que un nodo de demanda debe estar conectado a un centro de distribución. Cada flota usada en la operación, sea propia o subcontratada, no debe exceder su capacidad máxima en el transporte de carga de acuerdo a 3.12 y 3.13.

Con 3.14 se garantiza que la capacidad del depósito no exceda su límite de carga. En 3.15 se identifica el nodo final sin arco de salida para flota propia, siempre y cuando no se ingrese con flota subcontratada. Si j es un cliente terminal visitado por flota propia, entonces 3.16 obliga a que exista un arco de retorno. Con 3.17 y 3.18 se identifica en la red de transporte el depósito de inicio para vehículos propios, tal que se pueda activar el arco de retorno. Si el arco entre $i \in I$ y $j \in J$ está activo, entonces se garantiza por medio de 3.19 que la demanda de un cliente j está conectada con un centro de distribución i . Con 3.20 se establece la cantidad mínima de depósitos que deben ser instalados con base a la relación entre demanda total y capacidad del depósito. 3.21 Determina la cantidad mínima de vehículos usados en la operación a

partir de la relación entre demanda total y la capacidad del vehículo. En 3.22 se define el número máximo de flotas propias que van a ser usadas en la operación. De 3.23 a 3.30 se define la naturaleza de cada variable usada en el problema.

3.3. Modelo de impacto ambiental (cálculo del consumo de combustible)

El modelo de impacto ambiental es expuesto en Toro-ocampo (2016). Este modelo se basa en un sistema de equilibrio estático o de velocidad constante visto entre dos nodos que describen una trayectoria inclinada del vehículo como se muestra en la figura 7.

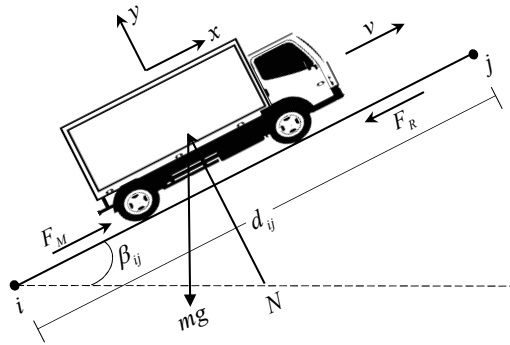


Figura 7: Fuerzas actuando sobre el vehículo.

De la figura 7, F_M es la fuerza que ejerce el motor para darle movimiento al vehículo. β_{ij} Representa el ángulo de inclinación promedio que posee una vía en un tramo definido ij . mg Representa el peso del vehículo. N Es la fuerza normal del vehículo. v es la velocidad promedio del vehículo entre el tramo ij y d_{ij} es la distancia promedio que hay entre el punto i y el punto j .

La fuerza de fricción \vec{F}_R es aquella que se opone al movimiento del vehículo, y está dada por las siguientes componentes:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R,\text{llantas}} + \vec{F}_{R,\text{viento}} + \vec{F}_{R,\text{internas}} + \frac{mv_{ij}^2}{2d_{ij}} \quad (3.31)$$

$\vec{F}_{R,\text{llantas}}$ Es la fuerza de fricción dada entre el pavimento y las llantas del vehículo, definida como el producto entre coeficiente de fricción y la fuerza normal. $\vec{F}_{R,\text{viento}}$ Es una componente de fricción debida a la resistencia del aire. $\vec{F}_{R,\text{internas}}$ Es una componente de fricción debida a las fuerzas internas del vehículo que se dan por las vibraciones del motor y $\frac{mv_{ij}^2}{2d_{ij}}$ es la fuerza que requiere el vehículo para alcanzar la energía cinética en estado estacionario a través de un trayecto definido.

Como el vehículo transporta una cantidad de carga a través de un arco ij , entonces su masa total a través del arco será la suma de la masa propia que posee el automotor y la masa transportada.

$$m = m_0 + t_{ij}$$

Siendo:

- m_0 : masa propia del vehículo.
- t_{ij} : masa de la carga transportada entre i y j .

Para establecer una función de consumo de combustible, es necesario encontrar una expresión para la fuerza del motor F_M . El procedimiento se sigue con un equilibrio de fuerzas estático en X y Y asumiendo velocidad constante.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x, & a_x &= 0 \\ \sum F_y &= ma_y, & a_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \Rightarrow F_M - F_R - mg \sin \beta_{ij} = 0 \\ \sum F_y &= ma_y \Rightarrow N - mg \cos \beta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Tal y como se nombró, $F_{R,\text{llantas}} = Nb$, donde b es el coeficiente de rozamiento constante que depende del tipo de terreno, y N es la fuerza normal.

Reemplazando las expresiones anteriores y despejando F_M se tiene:

$$F_M = (mg \cos \beta_{ij})b + F_{R,\text{viento}} + F_{R,\text{internas}} + \frac{mv_{ij}^2}{2d_{ij}} + mg \sin \beta_{ij} \quad (3.32)$$

Posteriormente se halla el trabajo $U_{ij} = F_M d_{ij}$ desde el nodo i hacia j dado como:

$$U_{ij} = [(m_0 + t_{ij})gb \cos \beta_{ij} + F_{R,\text{viento}} + F_{R,\text{internas}} + \frac{(m_0 + t_{ij})v_{ij}^2}{2d_{ij}} + (m_0 + t_{ij})g \sin \beta_{ij}] d_{ij}$$

Separando la ecuación anterior en componente m_0 y en componente t_{ij} , se obtiene la siguiente expresión.

$$U_{ij} = \left[m_0 g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} \frac{v_{ij}^2}{2gd_{ij}} \right) + F_{R,\text{viento}} + F_{R,\text{internas}} \right] d_{ij} + \left[g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} \frac{v_{ij}^2}{2gd_{ij}} \right) \right] t_{ij} d_{ij} \quad (3.33)$$

Debido a que en equilibrio estático la velocidad es constante:

$$U_{ij} = \alpha_{ij} d_{ij} + \gamma_{ij} t_{ij} d_{ij} \quad (3.34)$$

siendo:

$$\alpha_{ij} = m_0 g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} \frac{v_{ij}^2}{2gd_{ij}} \right) + F_{R,\text{viento}} + F_{R,\text{internas}} \quad (3.35)$$

$$\gamma_{ij} = g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} \frac{v_{ij}^2}{2gd_{ij}} \right) \quad (3.36)$$

La constante α_{ij} tiene unidades de $\frac{\text{Joule}}{\text{Km}}$ y está en función de la inclinación promedio entre i y j , el peso del vehículo en vacío, el tipo de terreno, las fuerzas de fricción internas y la fuerza requerida por el mismo para

alcanzar la energía cinética de estado estacionario. La constante γ_{ij} tiene unidades de $\frac{Joule}{Kg * Km}$ y está en función del ángulo promedio de inclinación entre ij y el tipo de terreno.

La ecuación 3.34 posee dos componentes debidas a la masa del vehículo en vacío o sin carga, y la masa de la carga transportada entre ij . Asumiendo que en promedio β_{ij} y b no cambian de valor en cada arco recorrido, entonces $\alpha_{ij} = \alpha$ y $\gamma_{ij} = \gamma$.

$$U_{ij} = \alpha d_{ij} + \gamma t_{ij} d_{ij} \quad (3.37)$$

Para determinar los arcos activos, se asignan las variables binarias a_{ij} , x_{ij} y s_{ij} y por lo tanto, la expresión de trabajo para flota propia y subcontratada es:

$$U_{ij}(t_{ij}, l_{ij}, x_{ij}, s_{ij}, a_{ij}) = \alpha d_{ij} x_{ij} + \alpha d_{ij} a_{ij} + \gamma t_{ij} d_{ij} x_{ij} + \alpha d_{ij} s_{ij} + \gamma l_{ij} d_{ij} s_{ij} \quad (3.38)$$

El trabajo total requerido por un vehículo para completar una ruta se da por la sumatoria de los trabajos realizados en cada tramo de ruta.

$$U_{ij-total} = \sum_{i,j \in V} U_{ij-1} + \sum_{i,j \in V} U_{ij-2}$$

$$\sum_{i,j \in V} U_{ij-1} = \alpha \left(\sum_{i,j \in V} d_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j \in V} d_{ij} a_{ij} \right) + \gamma \left(\sum_{i,j \in V} d_{ij} t_{ij} \right) \quad (3.39)$$

$$\sum_{i,j \in V} U_{ij-2} = \alpha \left(\sum_{i,j \in V} d_{ij} s_{ij} \right) + \gamma \left(\sum_{i,j \in V} d_{ij} l_{ij} \right) \quad (3.40)$$

La cantidad de gasolina necesaria para ejecutar el trabajo total $\sum_{i,j \in V} U_{ij-total}$ se obtiene multiplicando las ecuaciones 3.39 y 3.40 por un factor de conversión E_1 dado en (galones/J). La cantidad de emisiones por unidad de combustible esta dada por otro valor de conversión E_2 dado en (kgCO2/galones). Por consiguiente el número de emisiones emitidas debidas al consumo de gasolina para realizar el trabajo total se calcula así:

$$E_1 \times E_2 \times \sum_{i,j \in V} U_{ij-total} = E \times \left(\sum_{i,j \in V} U_{ij-1} + \sum_{i,j \in V} U_{ij-2} \right) \quad (3.41)$$

Siendo $E = E_1 \times E_2$.

Por tanto, el modelo desarrollado de impacto ambiental es lineal tal y como se muestra en 3.42, por lo cual se considera como objetivo adicional dentro del problema de ruteo MDVRPPC.

$$\text{mín } \Psi_2 = E \times \left(\sum_{i,j \in V} U_{ij-1} + \sum_{i,j \in V} U_{ij-2} \right) \quad (3.42)$$

4. Solución del problema multi-objetivo GMDVRPPC

4.1. Definición de la optimización multi-objetivo

La optimización multi-objetivo es un proceso matemático-computacional en el que 2 o más objetivos son puestos en conflicto para ser minimizados o maximizados y sujetos a un conjunto de restricciones. En la mayoría de los casos los objetivos no se minimizan o maximizan en un punto, por lo cual se constituyen herramientas de trabajo que permitan establecer un conjunto de soluciones para la toma de decisiones. Matemáticamente un problema multi-objetivo se define [Peñuela Meneses and Granada Echeverri \(2007\)](#):

$$\text{mín / máx } f_i(\vec{x}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (4.1)$$

sujeto a:

$$g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (4.2)$$

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (4.3)$$

$$x_n^{inf} \leq x_n \leq x_n^{sup} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.4)$$

Dentro de un conjunto de soluciones D para problemas multi-objetivo, se dice que una solución $x1 \in D$ es mejor que una solución $x2 \in D$ cuando:

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, M\}, f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \quad (4.5)$$

$$\exists i_o \in \{1, 2, 3, \dots, M\}, f_{i_o}(x_1) < f_{i_o}(x_2) \quad (4.6)$$

Es decir, x_1 domina a x_2 si uno de los objetivos evaluados en x_1 es menor o igual al evaluado en x_2 , y existe un punto x_1 que al ser evaluado en al menos una función objetivo, hace que esta sea estrictamente menor a la función objetivo evaluada en x_2 . En otras palabras lo que significa es que x_1 no es peor que x_2 en todos los objetivos y existe al menos una solución x_1 mejor que x_2 , (CÁCERES, N., BARÁN, B., & VIVEROS (2004) y Rodríguez et al. (2015)).

Lo anterior se representa simbólicamente así: $x_1 \prec_f x_2$.

En un conjunto de soluciones D pueden encontrarse soluciones no dominadas. Una solución no dominada, factible, eficiente o solución de pareto es aquella que no puede ser superada por otra solución que pertenece al espacio definido D Toro-ocampo (2016). El numero de soluciones eficientes dependen del numero de objetivos en conflicto y al ser no dominadas en una dirección, empeoran la calidad de los demás objetivos, y es por esa razón que a las soluciones no dominadas también se les denomina extremos de Pareto.

4.1.1. Método de epsilon constraint para la solución de problemas multi-objetivo

El método de epsilon constraint para problemas multi-objetivo fue propuesto por primera vez en HAIMES YV et al. (1971). La meta principal es resolver un problema mono-objetivo tomando uno de los objetivos del problema como la función a ser minimizada o maximizada, y los objetivos restantes entran a ser parte del sistema de restricciones que acompañan al problema con un valor de epsilon (ε) Mavrotas (2009).

Matemáticamente, lo anterior se define:

$$\text{mín / máx } f_i(x) \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, M\} \quad (4.7)$$

sujeto a:

$$g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (4.8)$$

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (4.9)$$

$$x_n^{inf} \leq x_n \leq x_n^{sup} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.10)$$

$$f_L(\vec{x}) \leq \varepsilon_L \quad L \in \{1, 2, 3, \dots, M\} \text{ and } L \neq i \quad (4.11)$$

Uno de los inconvenientes del método en cuestión es el aumento del numero de restricciones que son representadas en el modelo anterior por el sistema matricial 4.11. Estas restricciones son conocidas como las ε -restricciones y su cantidad depende de la diferencia entre el numero total de objetivos del problema y el valor de uno.

Para obtener de manera adecuada el frente de pareto, se debe tener en cuenta:

- Las soluciones no dominadas se obtienen a partir de la solución individual de cada objetivo.
- Cada valor de ε debe estar dentro del conjunto de soluciones óptimas de pareto que es delimitado por las soluciones no dominadas.
- Para asignar los valores de ε , se aplica optimización lexicográfica la cual consiste en minimizar un objetivo y restringir los demás en el valor de la respectiva solución no dominada. Una vez obtenida la nueva solución se sigue minimizando la función objetivo y se restringen las demás a los valores de la nueva solución óptima, y luego se continua de manera sucesiva.

Las ventajas de utilizar el método de ε -restricciones frente al de suma ponderada son Mavrotas (2009):

- Permite obtener soluciones intermedias del frente para problemas lineales.
- El método de suma ponderada no permite obtener soluciones eficientes frente a problemas de programación entera multi-objetivo.
- En el ε -constraint no es necesario escalar las funciones objetivo a escala comunes.
- En el ε -constraint se puede tener un control sobre el numero de soluciones eficientes ajustando el rango de solución de las funciones objetivo.

4.1.2. Solución al problema multi-objetivo GMDVRPPC utilizando el método ε -restricciones (*epsilon constraint*)

Para el GMDVRPPC el ε – *restricciones* es planteado así:

$$\min \Psi_1 = \sum_{i,j \in V} c_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij}a_{ij} + P \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} c_{ij}s_{ij} \quad (4.12)$$

sujeto a

$$\Psi_2 \leq \varepsilon_1 \quad (4.13)$$

$$\text{restricciones } 3,4 \text{ a } 3,30 \quad (4.14)$$

O bien:

$$\min \Psi_2 = E \times \sum_{i,j \in V} U_{ij} \quad (4.15)$$

sujeto a

$$\Psi_1 \leq \varepsilon_2 \quad (4.16)$$

$$\text{restricciones } 3,4 \text{ a } 3,30 \quad (4.17)$$

5. Análisis de sensibilidad de la función objetivo emisión de partículas respecto al estado de la vía, pendiente y superficie.

Un análisis de sensibilidad, consiste en observar los cambios o reacciones de una solución óptima frente a pequeñas variaciones en un parámetro del modelo matemático, estableciendo un factor de participación como indicativo de cambio en una solución. Las variaciones pueden ser:

- Variación en los coeficientes de las variables de la función objetivo.
- Variación en los coeficientes de las restricciones.
- Alteraciones de un recurso.
- Adición de una nueva variable de decisión.
- Adición de una nueva restricción.
- Variación en los límites de alguna variable de decisión.
- Salida de alguna de las variables de decisión.
- Otros.

5.1. Factores de sensibilidad de la función objetivo impacto ambiental

El análisis de sensibilidad empleado en este documento afecta las constantes α y γ de la función objetivo de impacto. El ángulo β_{ij} se determina con base en la inclinación de la vía para lo cual se asumen valores entre 0 y 20 grados en pasos de 5. Además para el estado de la misma se asume un coeficiente de fricción estático de $b \simeq 0,7$ entre caucho y pavimento asfáltico.

Por lo anterior se constituyen 5 casos de estudio descritos así:

1. Caso 0° , denominado como caso base.
2. Caso 5° , coeficiente $b = 0,7$.
3. Caso 10° , coeficiente $b = 0,7$.
4. Caso 15° , coeficiente $b = 0,7$.
5. Caso 20° , coeficiente $b = 0,7$.

5.1.1. Cálculo de la distancia de acuerdo a la pendiente

Debido a que el ángulo de inclinación de la vía β_{ij} incide sobre la distancia d_{ij} , se le debe sumar un factor de corrección g por efecto pendiente tal y como se demuestra a continuación, [Carciente \(1980\)](#).

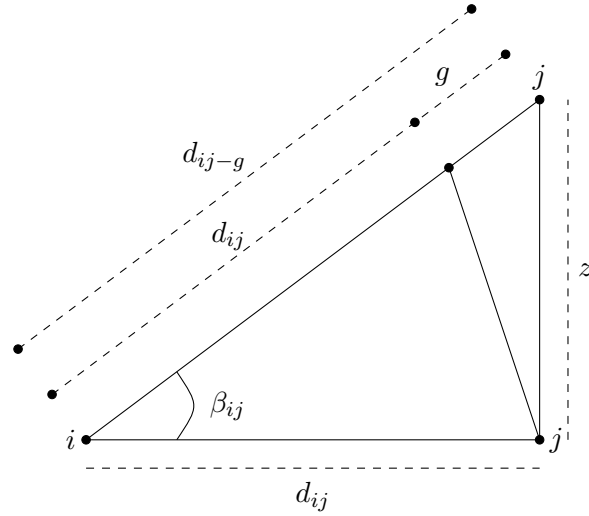


Figura 8: Corrección de distancia d_{ij} por efecto pendiente

La distancia d_{ij-g} por efecto pendiente se calcula como:

$$d_{ij-g} = d_{ij} + g \quad (5.1)$$

Para encontrar el factor de corrección g se aplica teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (d_{ij} + g)^2 &= z^2 + d_{ij}^2 \\ d_{ij}^2 + 2gd_{ij} + g^2 &= z^2 + d_{ij}^2 \end{aligned}$$

Agrupando las g a un solo lado de la igualdad y operando algebraicamente se obtiene:

$$\begin{aligned} 2gd_{ij} + g^2 &= z^2 \\ g(2d_{ij} + g) &= z^2 \end{aligned}$$

$$g = \frac{z^2}{2d_{ij} + g}$$

Como g es un valor mucho más pequeño que $2d_{ij}$, entonces $2d_{ij} + g \simeq 2d_{ij}$ y por tanto:

$$g \simeq \frac{z^2}{2d_{ij}}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores típicos de g para diferentes grados de inclinación.

Pendiente en grados	Corrección	Pendiente en porcentaje	Pendiente en grados	Corrección	Pendiente en porcentaje	Pendiente en grados	Corrección	Pendiente en porcentaje	Pendiente en grados	Corrección	Pendiente en porcentaje
1° 49'	0,1	3,2	15° 06'	3,5	27,0	21° 20'	6,9	39,0	26° 10'	10,3	49,1
3° 08'	0,2	5,5	15° 19'	3,6	27,4	21° 29'	7,0	39,4	26° 18'	10,4	49,4
4° 03'	0,3	7,1	15° 32'	3,7	27,8	21° 39'	7,1	39,7	26° 26'	10,5	49,7
4° 48'	0,4	8,4	15° 44'	3,8	28,2	21° 48'	7,2	40,0	26° 33'	10,6	50,0
5° 26'	0,5	9,5	15° 57'	3,9	28,6	21° 57'	7,3	40,3	26° 41'	10,7	50,3
6° 01'	0,6	10,5	16° 09'	4,0	29,0	22° 06'	7,4	40,6	26° 49'	10,8	50,5
6° 32'	0,7	11,4	16° 22'	4,1	29,4	22° 15'	7,5	40,9	26° 56'	10,9	50,8
7° 01'	0,8	12,3	16° 34'	4,2	29,7	22° 24'	7,6	41,2	27° 04'	11,0	51,1
7° 29'	0,9	13,1	16° 46'	4,3	30,1	22° 33'	7,7	41,5	27° 11'	11,1	51,4
7° 54'	1,0	13,9	16° 58'	4,4	30,5	22° 42'	7,8	41,8	27° 19'	11,2	51,6
8° 19'	1,1	14,6	17° 09'	4,5	30,9	22° 51'	7,9	42,1	27° 26'	11,3	51,9
8° 42'	1,2	15,3	17° 21'	4,6	31,2	23° 00'	8,0	42,4	27° 34'	11,4	52,2
9° 04'	1,3	16,0	17° 32'	4,7	31,6	23° 09'	8,1	42,7	27° 41'	11,5	52,5
9° 26'	1,4	16,6	17° 44'	4,8	32,0	23° 18'	8,2	43,0	27° 49'	11,6	52,7
9° 47'	1,5	17,2	17° 55'	4,9	32,3	23° 26'	8,3	43,3	27° 56'	11,7	53,0
10° 06'	1,6	17,8	18° 06'	5,0	32,7	23° 35'	8,4	43,6	28° 03'	11,8	53,3
10° 25'	1,7	18,4	18° 17'	5,1	33,0	23° 43'	8,5	43,9	28° 11'	11,9	53,6
10° 44'	1,8	19,0	18° 28'	5,2	33,4	23° 52'	8,6	44,2	28° 18'	12,0	53,8
11° 02'	1,9	19,5	18° 39'	5,3	33,7	24° 00'	8,7	44,5	28° 25'	12,1	54,1
11° 20'	2,0	20,0	18° 50'	5,4	34,1	24° 09'	8,8	44,8	28° 32'	12,2	54,4
11° 37'	2,1	20,6	19° 00'	5,5	34,4	24° 17'	8,9	45,1	28° 39'	12,3	54,7
11° 54'	2,2	21,1	19° 11'	5,6	34,8	24° 26'	9,0	45,4	28° 47'	12,4	54,9
12° 11'	2,3	21,6	19° 21'	5,7	35,1	24° 34'	9,1	45,7	28° 54'	12,5	55,2
12° 27'	2,4	22,1	19° 31'	5,8	35,5	24° 42'	9,2	46,0	29° 01'	12,6	55,5
12° 43'	2,5	22,6	19° 42'	5,9	35,8	24° 50'	9,3	46,3	29° 08'	12,7	55,7
12° 58'	2,6	23,0	19° 52'	6,0	36,1	24° 58'	9,4	46,6	29° 15'	12,8	56,0
13° 13'	2,7	23,5	20° 02'	6,1	36,5	25° 07'	9,5	46,9	29° 22'	12,9	56,3
13° 28'	2,8	23,9	20° 12'	6,2	36,8	25° 15'	9,6	47,1	29° 29'	13,0	56,5
13° 43'	2,9	24,4	20° 22'	6,3	37,1	25° 23'	9,7	47,4	29° 36'	13,1	56,8
13° 57'	3,0	24,8	20° 32'	6,4	37,4	25° 31'	9,8	47,7	29° 43'	13,2	57,1
14° 11'	3,1	25,3	20° 41'	6,5	37,8	25° 39'	9,9	48,0	29° 50'	13,3	57,3
14° 25'	3,2	25,7	20° 51'	6,6	38,1	25° 47'	10,0	48,3	29° 57'	13,4	57,6
14° 39'	3,3	26,1	21° 01'	6,7	38,4	25° 54'	10,1	48,6	30° 04'	13,5	57,9
14° 52'	3,4	26,6	21° 10'	6,8	38,7	26° 02'	10,2	48,9	30° 10'	13,6	58,1
15° 06'		27,0	21° 20'		39,0	26° 10'		49,1	30° 17'		58,4

Figura 9: Valores típicos de g para diferentes pendientes

De la figura 9, los valores de g para diferentes grados de pendiente representan un porcentaje estándar de la distancia corregida d_{ij} , y por tanto la expresión 5.1 se reescribe de la siguiente manera:

$$d_{ij-g} = d_{ij} + \underbrace{g \frac{d_{ij}}{100}}_{\text{Se suma un } g \% \text{ de } d_{ij}}$$

Sacando factor común d_{ij} de la ecuación anterior:

$$d_{ij-g} = \left(1 + \frac{g}{100}\right) d_{ij}$$

Re-expresando la ecuación anterior:

$$d_{ij-g} = \left(\frac{100 + g}{100}\right) d_{ij} \quad (5.2)$$

A partir de la figura 8, la expresión 5.2 puede ser expresada en función del ángulo β_{ij} y la distancia a cero grados d_{ij} , así:

$$\cos \beta_{ij} = \frac{d_{ij}}{d_{ij-g}}$$

Despejando d_{ij-g} de la igualdad anterior:

$$d_{ij-g} = \left(\frac{1}{\cos \beta_{ij}}\right) d_{ij} \quad (5.3)$$

De las ecuaciones 5.2 y 5.3 se deduce:

$$\left(\frac{1}{\cos \beta_{ij}}\right) \simeq \left(\frac{100 + g}{100}\right) \quad (5.4)$$

Los factores anteriores se definen como los parámetros de sensibilidad asociados a la inclinación del arco ij .

Las ecuaciones 5.2 o 5.3 poseen el inconveniente de que para múltiples pendientes se debe constituir un arco por cada pendiente, por lo que la complejidad matemática del problema se volvería altamente compleja y de muy difícil solución. Con el fin de evitar la explosión en el número de arcos como consecuencia de la simulación de las pendientes de la vía entre los puntos que la conectan, será calculada una distancia y ángulo virtual que representen las pendientes entre los puntos de la vía que la conectan.

5.1.2. Cálculo de la distancia virtual teniendo en cuenta el relieve del arco

En su más reciente libro sobre diseño geométrico de carreteras, Gárdenas Grisales (2013) expone una serie de conocimientos adquiridos sobre la geometría de vías para un correcto funcionamiento y diseño de las mismas.

Cárdenas define una carretera como "infraestructura de transporte... dentro de un derecho de vía", que tiene como propósito permitir la libre y cómoda circulación de vehículos.

Las carreteras pueden ser clasificadas según (Gárdenas Grisales (2013)):

1. **Según su función:** Ligada a la operación de carreteras. Una carretera se clasifica para el caso colombiano como:

- **Primaria:** interconectan las principales zonas de producción y consumo. También se conocen como vías de comercialización y estas son las vías troncales y transversales.
- **Secundaria:** vías que unen cabeceras municipales entre sí. Por lo general provienen de una primaria.
- **Terciaria:** unen cabeceras municipales a veredas.

2. **Según el tipo de terreno:** Ligada a la topografía de una vía en un tramo de estudio.

En Colombia una superficie es clasificada así:

Cuadro 1: Clasificación de las superficies

Tipo de terreno	Pendiente máxima media de las líneas de máxima pendiente de terreno (%)	inclinación transversal al eje de la vía del terreno (°)
Plano (P)	0-5	0-6
Ondulado (O)	5-25	6-13
Montañoso (M)	25-75	13-40
Escarpado (E)	> 75	> 40

Así, las carreteras se consideran:

- **En terreno plano:** Permite a los vehículos pesados y livianos mantener una velocidad constante para pendientes longitudinales menores al 3 %.
 - **En terreno ondulado:** Los vehículos pesados se ven obligados a reducir sus velocidades, pues sus pendientes longitudinales varían entre el 3 % y el 6 %.
 - **En terreno montañoso:** Los vehículos pesados deben mantener velocidades pequeñas sostenidas a lo largo de distancias considerables o durante intervalos frecuentes. Sus pendientes longitudinales varían entre el 6 % y el 8 %.
 - **En terreno escarpado:** Los vehículos pesados se ven obligados a mantener velocidades inferiores a las de un vehículo en carretera montañoso. Sus pendientes longitudinales son mayores al 8 %.
3. **Según su competencia.** Depende del tipo de organización administrativa a cargo del tipo de carretera. Por ejemplo las carreteras nacionales están bajo la concesión del Instituto Nacional de Vías (INVIAS).
4. **Según sus características.** Divididas en autopistas, multicarril y de dos carriles.

Pendiente longitudinal de una vía

Una pendiente longitudinal representa el perfil que posee un terreno dadas las alturas de los tramos que trazan la vía. Una pendiente longitudinal está dada en % e indica el nivel de altura que posee un tramo de vía por cada metro plano recorrido.

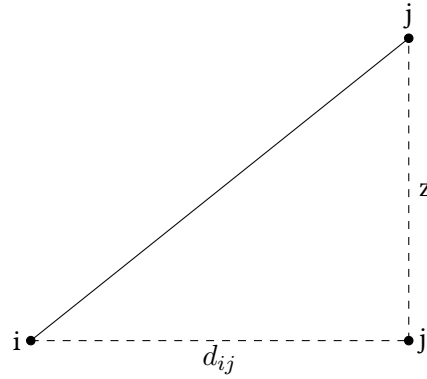


Figura 10: Pendiente longitudinal de un arco ij

Se define la pendiente longitudinal:

$$Pendiente(\%) = \frac{z(m) \rightarrow \text{altura}}{d_{ij}(m) \rightarrow \text{distancia plana}} \times 100 \quad (5.5)$$

Lineas de pendiente y cálculo de la distancia virtual

Las líneas de pendiente son líneas que pasan por los puntos obligados de una ruta y que se trazan a raz del terreno natural para seguir la forma que este posee, y para hacerlo es necesario conocer las curvas de nivel asociadas. Un trazado sucesivo de varias líneas de pendiente determinan el perfil longitudinal de un terreno.

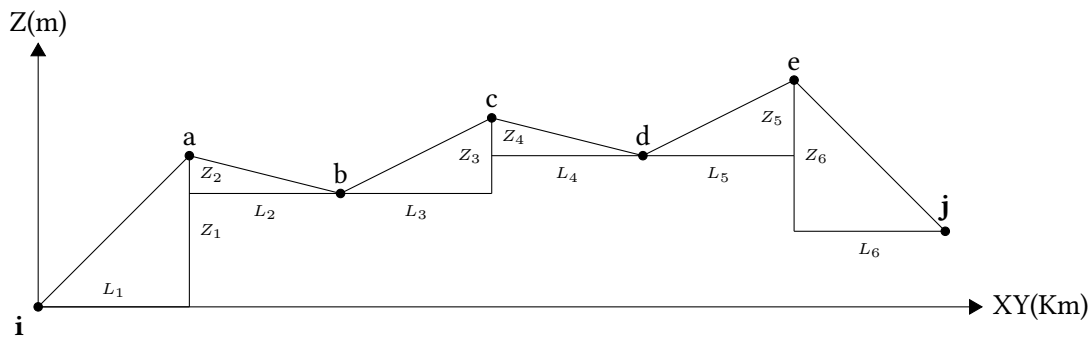


Figura 11: Perfil longitudinal de una ruta entre i y j

Para determinar el costo operativo de un vehículo entre una ruta ij es necesario determinar la distancia

euclidiana denominada como horizontal o distancia a cero grados y este valor es llamado C_{ij} . Sin embargo, cuando el vehículo viaja por una pendiente el costo será, [Carciente \(1980\)](#):

$$C_{ij} (1 + n)$$

Siendo n una función de la pendiente.

De la misma manera, si el vehículo viaja a través de una curva el costo de operación será:

$$C_{ij} (1 + m)$$

Siendo m una función del radio de curvatura.

Si una ruta ij de longitud d_{ij} plana se divide en trazados de pendiente de longitud L_1, L_2, \dots, L_k y cada uno con coeficientes de pendiente n_1, n_2, \dots, n_k ; y en tramos de curvas donde cada una tiene una longitud L'_1, L'_2, \dots, L'_k y con coeficientes de radio de curvatura m_1, m_2, \dots, m_k respectivos, entonces el costo de operación se define:

$$d_{ij} [1 + (n_1, n_2, \dots, n_k) + (m_1, m_2, \dots, m_k)]$$

Expresado también bajo la forma general:

$$d_{ij} [1 + n + m]$$

La longitud anterior se define como *longitud virtual de la ruta ij* y su complejidad reside en establecer los coeficientes n y m .

Para simplificar el cálculo de los coeficientes anteriores se aplica el método de Bruce, el cual emplea el mismo concepto de distancia virtual pero desde el punto de vista del aumento de longitud por esfuerzo de tracción en las pendientes.

Planteamiento de la distancia virtual según el método de Bruce

Para determinar la longitud virtual según el método de Bruce, es necesario retomar la ecuación de energía vista en la subsección 3.3 de modelo de impacto ambiental.

Sea un vehículo de carga m , definida como:

$$m = m_0 + t_{ij} \Rightarrow \text{carga de flota propia}$$

$$m = m_0 + l_{ij} \Rightarrow \text{carga de flota subcontratada}$$

Siendo t_{ij} el flujo de flota propia entre el arco ij ; l_{ij} es el flujo de flota subcontratada entre el arco ij y m_0 corresponde a la masa del vehículo;

la ecuación de trabajo de flota propia y subcontratada para un arco activo ij es:

$$U_{ij}(t_{ij}, l_{ij}, x_{ij}, s_{ij}, a_{ij}) = \alpha d_{ij} x_{ij} + \alpha d_{ij} a_{ij} + \gamma t_{ij} d_{ij} x_{ij} + \alpha d_{ij} s_{ij} + \gamma l_{ij} d_{ij} s_{ij}$$

Siendo α, γ constantes del estado del terreno dadas en J/km y $J/Kg * Km$ respectivamente. d_{ij} Es la distancia viajada por el vehículo; x_{ij} y s_{ij} son variables binarias correspondientes a un arco activo de flota propia o subcontratada respectivamente y a_{ij} es una variable binaria correspondiente a la activación de arco de retorno para flota propia.

La ecuación anterior es dividida en dos componentes así:

$$U_{ij}(t_{ij}, l_{ij}, x_{ij}, s_{ij}, a_{ij}) = U_{ij1} + U_{ij2}$$

$$U_{ij1} = \alpha(d_{ij}x_{ij} + d_{ij}a_{ij} + d_{ij}s_{ij}) \quad (5.6)$$

$$U_{ij2} = \gamma(t_{ij}d_{ij}x_{ij} + l_{ij}d_{ij}s_{ij}) \quad (5.7)$$

La ecuación 5.6 corresponde al trabajo del vehículo debido a su propia masa; la ecuación 5.7 es el trabajo del vehículo debido al flujo entre el arco activo ij .

Al multiplicar las ecuaciones anteriores por el coeficiente de tracción φ :

$$U_{ij1} = \alpha\varphi(d_{ij}x_{ij} + d_{ij}a_{ij} + d_{ij}s_{ij})$$

$$U_{ij2} = \gamma\varphi(t_{ij}d_{ij}x_{ij} + l_{ij}d_{ij}s_{ij})$$

Si existen diferencias de altura o varias diferencias de altura en el eje de elevación z , entonces a las ecuaciones anteriores se les suma una componente de trabajo realizada por el vehículo en subida siendo $\sum z$ las distancias verticales recorridas por el vehículo.

$$U_{ij1} = \alpha\varphi(d_{ij}x_{ij} + d_{ij}a_{ij} + d_{ij}s_{ij}) + \alpha(x_{ij} + a_{ij} + s_{ij}) \sum z \quad (5.8)$$

$$U_{ij2} = \gamma\varphi(t_{ij}d_{ij}x_{ij} + l_{ij}d_{ij}s_{ij}) + \gamma(t_{ij}x_{ij} + l_{ij}s_{ij}) \sum z \quad (5.9)$$

Agrupando la ecuación 5.8 en función de x_{ij} , s_{ij} y a_{ij} ; y la ecuación 5.9 en función de flujo de vehículo propio y subcontratado se tiene:

$$U_{ij1} = \alpha \left(\varphi d_{ij} x_{ij} + x_{ij} \sum z \right) + \alpha \left(\varphi d_{ij} a_{ij} + a_{ij} \sum z \right) + \alpha \left(\varphi d_{ij} s_{ij} + s_{ij} \sum z \right)$$

$$U_{ij2} = \gamma \left(\varphi t_{ij} d_{ij} x_{ij} + t_{ij} x_{ij} \sum z \right) + \gamma \left(\varphi l_{ij} d_{ij} s_{ij} + l_{ij} s_{ij} \sum z \right)$$

Reescribiendo las expresiones anteriores de la siguiente forma:

$$U_{ij1} = \alpha \left(\varphi x_{ij} d_{ij} + \frac{\varphi x_{ij} \sum z}{\varphi} \right) + \alpha \left(\varphi a_{ij} d_{ij} + \frac{\varphi a_{ij} \sum z}{\varphi} \right) + \alpha \left(\varphi s_{ij} d_{ij} + \frac{\varphi s_{ij} \sum z}{\varphi} \right)$$

$$U_{ij2} = \gamma \left(\varphi t_{ij} x_{ij} d_{ij} + \frac{\varphi t_{ij} x_{ij} \sum z}{\varphi} \right) + \gamma \left(\varphi l_{ij} s_{ij} d_{ij} + \frac{\varphi l_{ij} s_{ij} \sum z}{\varphi} \right)$$

Sacando factor común en ambas ecuaciones se tiene lo siguiente:

$$U_{ij1} = \alpha\varphi x_{ij} \left(d_{ij} + \frac{\sum z}{\varphi} \right) + \alpha\varphi a_{ij} \left(d_{ij} + \frac{\sum z}{\varphi} \right) + \alpha\varphi s_{ij} \left(d_{ij} + \frac{\sum z}{\varphi} \right)$$

$$U_{ij2} = \gamma\varphi t_{ij} x_{ij} \left(d_{ij} + \frac{\sum z}{\varphi} \right) + \gamma\varphi l_{ij} s_{ij} \left(d_{ij} + \frac{\sum z}{\varphi} \right)$$

Se define el inverso del coeficiente de tracción k como: $k = \frac{1}{\varphi}$

Y por consiguiente:

$$U_{ij1} = \alpha\varphi x_{ij} \left(d_{ij} + k \sum z \right) + \alpha\varphi a_{ij} \left(d_{ij} + k \sum z \right) + \alpha\varphi s_{ij} \left(d_{ij} + k \sum z \right) \quad (5.10)$$

$$U_{ij2} = \gamma\varphi t_{ij} x_{ij} \left(d_{ij} + k \sum z \right) + \gamma\varphi l_{ij} s_{ij} \left(d_{ij} + k \sum z \right) \quad (5.11)$$

Sumando U_{ij1} y U_{ij2} de las expresiones anteriores, y sacando como factor común la expresión contenida en el paréntesis se obtiene:

$$U_{0-ij} = \left(d_{ij} + k \sum z \right) \varphi [\alpha x_{ij} + \alpha a_{ij} + \alpha s_{ij} + \gamma t_{ij} x_{ij} + \gamma l_{ij} s_{ij}] \quad (5.12)$$

Se define la distancia virtual o resistente d_{0-ij} así, [Carciente \(1980\)](#), [Gárdenas Grisales \(2013\)](#):

$$d_{0-ij} = d_{ij} + k \times \sum z \quad (5.13)$$

Con pendiente media virtual ij igual a:

$$Pendiente_{(0-ij)} \% = \frac{\sum z}{d_{ij}} \times 100 \quad (5.14)$$

Siendo d_{ij} la distancia plana real del arco ij . $\sum z$ representa la suma de desniveles por contrapendientes en dirección ij . El parámetro k se define como el inverso del coeficiente de tracción y está en función del tipo de capa de rodadura de la vía. En la siguiente tabla se muestran los valores típicos de k

Cuadro 2: Valores típicos del inverso de coeficiente de tracción.

TIPO DE SUPERFICIE	VALOR MEDIO DE k
Carretera en tierra	21
MacAdam	32
Pavimento asfáltico	35
Pavimento rígido	44

Generalizando la ecuación 5.12 se tiene:

$$U_{ij-0} = d_{0-ij} \varphi [\alpha x_{ij} + \alpha a_{ij} + \alpha s_{ij} + \gamma t_{ij} x_{ij} + \gamma l_{ij} s_{ij}] \quad (5.15)$$

U_{0-ij} es el trabajo virtual requerido por el vehículo propio o subcontratado para viajar entre un arco ij con determinado estado de vía y múltiples pendientes., y solo se tiene en cuenta cuando se conoce el relieve del arco ij .

El uso de la ecuación de distancia virtual y de trabajo virtual solo deben ser tenidas en cuenta cuando se conoce el relieve del arco ij . Las ventajas de uso radican en la elaboración de un solo caso de estudio que contempla múltiples pendientes. Sin embargo este problema es de mucha complejidad matemática ya que se requiere especificar los puntos de relieve en el sistema de coordenadas.

Ejercicio de aplicación

Aunque el uso de la ecuación de distancia virtual en esta investigación se propone con el fin de simular múltiples pendientes en un arco ij y de acuerdo al tipo de rodadura usada para el terreno de la vía, la aplicación verdadera de esta ecuación está en evaluar la ruta de menor costo. Para ilustrar lo anterior, considérese 3 perfiles longitudinales de 3 rutas dadas entre los puntos A y B como se muestra en la figura 12.

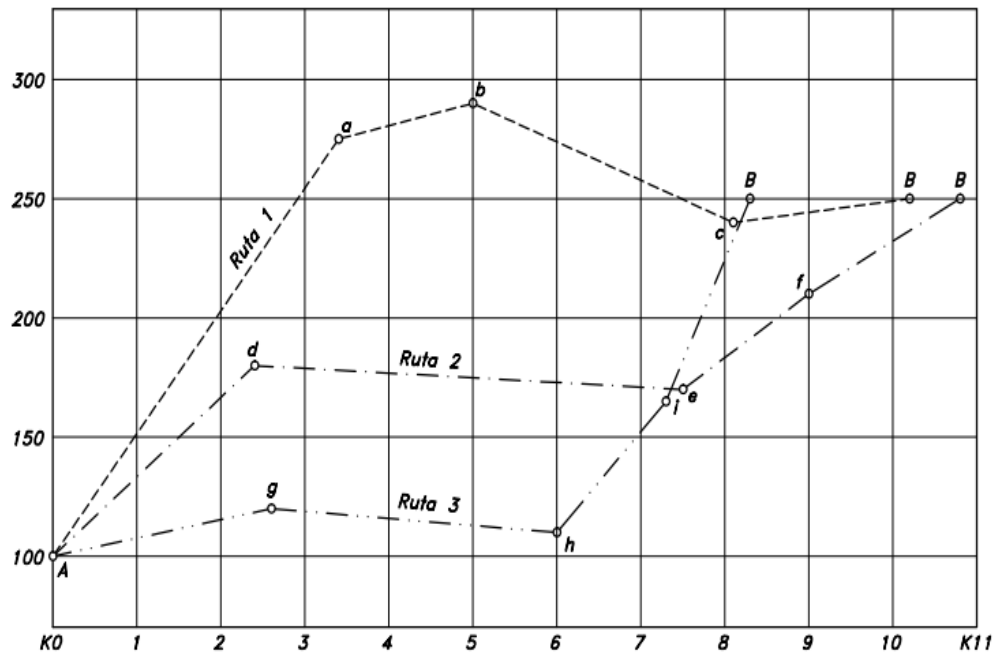


Figura 12: Perfil longitudinal de rutas, extraídas de [Gárdenas Grisales \(2013\)](#).

Cada ruta es evaluada en dirección AB y se asume que $K = 44$, y la de menor costo es aquella que presenta la menor longitud virtual.

Evaluación ruta 1

Tramo Aa

$$z_1 = 275 - 100 = 175m, \text{ distancia horizontal} \rightarrow d_{Aa} = 3400m$$

Tramo ab

$$z_2 = 290 - 275 = 15m, \text{ distancia horizontal} \rightarrow d_{ab} = 1600m$$

Tramo bc

$$z_3 = 240 - 290 = -50m, \text{ distancia horizontal} \rightarrow d_{bc} = 3100m$$

Tramo cB

$$z_4 = 250 - 240 = 10m, \text{ distancia horizontal} \rightarrow d_{cB} = 2100m$$

Distancia virtual d_{0-AB} para la ruta 1

La suma de contrapendientes en dirección AB es: $\sum z = z_1 + z_2 + z_4$.

La distancia plana AB es: $d_{AB} = d_{Aa} + d_{ab} + d_{bc} + d_{cB}$.

$$d_{0-AB} = d_{AB} + k \times \sum z = 19000m$$

$$Pendiente_{AB(\%)} = \frac{\sum z}{d_{AB}} \times 100 = 1,960784$$

Evaluación ruta 2

Tramo Ad

$$z_1 = 180 - 100 = 80m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{Aa} = 2400m$$

Tramo de

$$z_2 = 170 - 180 = -10m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{ab} = 5100m$$

Tramo ef

$$z_3 = 210 - 170 = 40m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{bc} = 1500m$$

Tramo fB

$$z_4 = 250 - 210 = 40m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{cB} = 1800m$$

Distancia virtual d_{0-AB} para la ruta 2

La suma de contrapendientes en dirección AB es: $\sum z = z_1 + z_3 + z_4$.

La distancia plana AB es: $d_{AB} = d_{Ad} + d_{de} + d_{ef} + d_{fB}$.

$$d_{0-AB} = d_{AB} + k \times \sum z = 17840m$$

$$Pendiente_{AB(\%)} = \frac{\sum z}{d_{AB}} \times 100 = 1,481481$$

Evaluación ruta 3

Tramo Ag

$$z_1 = 120 - 100 = 20m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{Aa} = 2600m$$

Tramo gh

$$z_2 = 110 - 120 = -10m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{ab} = 3400m$$

Tramo hi

$$z_3 = 165 - 110 = 55m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{bc} = 1300m$$

Tramo iB

$$z_4 = 250 - 165 = 85m, \text{ distancia horizontal } \rightarrow d_{cB} = 1000m$$

Distancia virtual d_{0-AB} para la ruta 3

La suma de contrapendientes en dirección AB es: $\sum z = z_1 + z_3 + z_4$.

La distancia plana AB es: $d_{AB} = d_{Ag} + d_{gh} + d_{hi} + d_{iB}$.

$$d_{0-AB} = d_{AB} + k \times \sum z = 15340m$$

$$Pendiente_{AB}(\%) = \frac{\sum z}{d_{AB}} \times 100 = 1,927711$$

Como la distancia virtual d_{0-AB} de la ruta 3 es menor que la distancia virtual de la ruta 2 y la 1, se afirma que el perfil longitudinal del arco AB representado por la ruta 3 es el de menor costo.

Consideraciones sobre la distancia virtual de un arco

En caso de querer afrontar un problema con distancia virtual, se debe tener en cuenta:

- Se debe especificar los puntos de relieve en el sistema de coordenadas o conocer las curvas de nivel asociadas al arco ij .
- La ecuación de trabajo vista en la subsección de modelo de impacto ambiental, se reemplaza por la ecuación 5.15, correspondiente al trabajo virtual .
- Determinar contrapendientes en dirección ij y ji
- Determinar el tipo de terreno y asignar un valor de k .

La distancia virtual ij y ji no es la misma ya que ambas dependen del numero de contrapendientes, por ello el problema de distancia virtual se torna asimétrico.

Para simplificar el problema se aplica la ecuación de corrección de distancia por efecto pendiente (ecuación 5.2 o 5.3) y luego se construyen múltiples casos de estudio para varias pendientes.

6. Resultados y análisis

En esta sección se exponen los resultados obtenidos para los casos de inclinación dados en la sección de análisis de sensibilidad, asumiendo un factor de sensibilidad para la distancia de $\frac{1}{\cos \beta_{ij}}$ para simplificar el problema de distancia virtual.

Se trabajan instancias modificadas de 20 y 30 obtenidas a partir de la instancia principal ¹ p01 de [Cordeau et al. \(1997\)](#) y se usa un computador con sistema operativo Windows 7 de 64 bits con procesador Intel(R) Core(TM) i5-4460S CPU @ 2.90 GHz y una memoria RAM instalada de 12.0 GB.

Los parámetros del modelo de impacto ambiental fueron extraídos del Instituto de Investigación de Transporte de la Universidad de Michigan ² en el que para una línea de flota homogénea con capacidad de 20 toneladas el promedio de consumo de combustible es de aproximadamente de 25,3 *mpg* (millas por galón) equivalente a consumir un galón de gasolina corriente por cada 15.7207Km recorridos.

Los datos anteriores son comparados con la guía de consumo del Instituto de Recursos de Canadá ³ la cual afirma que en promedio un vehículo produce 2.3 $KgCO_2$ por litro usado, y que para el caso de la línea de flotas usadas en esta investigación equivale a un promedio de 8,706449 $KgCO_2$ por galón. El costo de las emisiones se calcula con base a los precios cotizados por el Sistema Europeo de Negociación de CO_2 ⁴ (SENDEC CO_2), que para el caso en cuestión es de 0,009 *USD* por $KgCO_2$. La cuantificación del precio de un galón de gasolina depende del país sobre el que se va a hacer el caso de estudio y que puede ser consultado en *GlobalPetrolPrices.com* ⁵. Para el caso colombiano el precio es de 3,92 *USD* por galón.

Posteriormente se construye para cada caso de inclinación un frente de pareto. De cada frente se obtiene un punto representativo dado por la métrica *MIN – MAX* explicada en [Lopez et al. \(2011\)](#) y definida por la siguiente ecuación.

¹<http://www.bernabe.dorronsoro.es/vrp/>

²<http://www.umtri.umich.edu/what-were-doing/news/large-drop-fuel-economy-september>

³<https://www.nrcan.gc.ca/energy/efficiency/transportation/21002>

⁴<https://www.sendeco2.com/es/>

⁵<https://es.globalpetrolprices.com/>

$$\frac{FO_{1-max} - FO_{1-i}}{FO_{1-max} - FO_{1-min}}, \frac{FO_{2-max} - FO_{2-i}}{FO_{2-max} - FO_{2-min}} \quad (6.1)$$

Para seleccionar el punto MIN-MAX de cada frente se deben seguir los siguientes pasos:

- Se identifican los puntos extremos del frente de pareto.
- Cada punto del frente se normaliza aplicando la formula 6.1
- Una vez normalizada cada pareja de puntos, se determina el menor valor de cada pareja.
- Cuando los valores menores de cada pareja han sido obtenidos, se compara cada uno de dichos valores y se determina el mayor.
- Una vez identificado el valor mayor según el ítem anterior, se procede a verificar la pareja de la cual este valor fue obtenido.
- La pareja identificada de acuerdo al ítem anterior, corresponde a la mejor solución encontrada por la métrica y se define como la solución de equilibrio entre los objetivos.

Resultados para la instancia de 20 clientes 4 depósitos.

instancia GMDVRPPC_20_P01 tomada de Cordeau et al. (1997)					
Caso	Puntos del frente	Ψ_1 (costos)	Ψ_2 impacto($KgCO_2$)	Mejor punto por MIN-MAX	Tiempo (segundos)
0°	Extremo 1	300	1781.36	punto 4	221
	Extremo 2	384	1320.56		0
	1	365	1403.09		2
	2	360	1430.60		2
	3	351	1437.48		4
	4	335	1520.01		7
	5	329	1554.4		12
	6	316	1657.57		40
	7	308	1671.32		10

Continúa en la siguiente página.

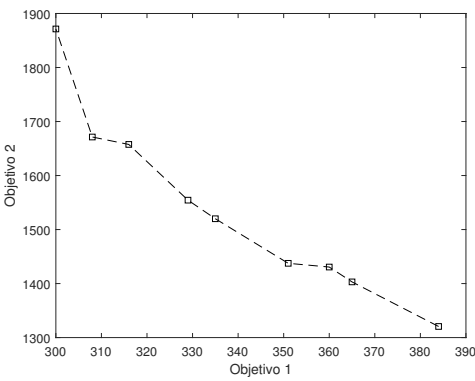
Caso	Puntos del frente	Ψ_1 (costos)	Ψ_2 impacto($KgCO_2$)	Mejor punto por MIN-MAX	Tiempo (segundos)
5°	Extremo 1	301	1868.62	punto 4	268
	Extremo 2	384	1379.89		0
	1	365	1466.13		1
	2	360	1494.88		3
	3	352	1509.25		6
	4	336	1595.49		16
	5	330	1631.42		39
	6	317	1739.23		76
10°	Extremo 1	304	1964.63	punto 4	219
	Extremo 2	390	1456.65		0
	1	376	1553.75		2
	2	368	1503.64		1
	3	357	1591.1		2
	4	341	1680.74		13
	5	335	1718.08		16
	6	328	1807.73		38
15°	Extremo 1	308	2055.93	punto 3	244
	Extremo 2	398	1538.09		0
	1	378	1630.84		1
	2	362	1669.49		2
	3	344	1769.96		8
	4	335	1824.07		26
	5	328	1932.27		36
	6	317	1932.27		16
20°	Extremo 1	319.19	2181.78	punto 3	105
	Extremo 2	408	1624.39		1
	1	393.12	1735.86		2

Continúa en la siguiente página.

Caso	Puntos del frente	Ψ_1 (costos)	Ψ_2 impacto($KgCO_2$)	Mejor punto por MIN-MAX	Tiempo (segundos)
	2	373.29	1767.72		2
	3	358.41	1879.19		16
	4	346.15	1934.94		26
	5	328.36	2046.41		38

Cuadro 3: Resultados del GMDVRPPC-20 clientes

En las siguientes tablas se anexan los frentes de pareto por cada caso de inclinación, y se exponen las rutas de cada punto representativo del frente.

Caso 0°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	RUTAS PROPIAS ruta 1: 1-17-23-1 ruta 2: 2-10-11-12-5-2 ruta 3: 3-9-16-21-19-14-3 ruta 4: 3-13-20-6-15-3 RUTAS TERCERIZADAS ruta 5: 1-8-22-18 ruta 6: 4-24-7	
Extremo 2	RUTAS PROPIAS RUTAS TERCERIZADAS ruta 1: 1-8-22 ruta 2: 1-21-19 ruta 3: 1-23-17 ruta 4: 2-10-18 ruta 5: 2-16-9 ruta 6: 3-13-20-15 ruta 7: 3-14	

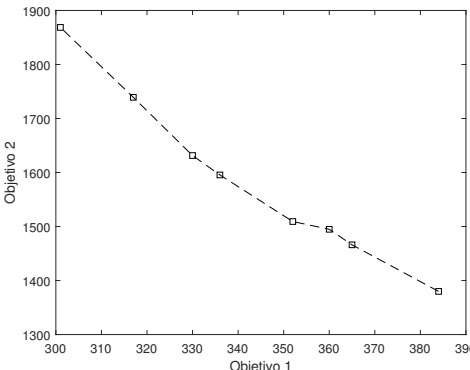
Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
	ruta 8: 4-6-5-12-11 ruta 9: 4-24-7	
Punto por MIN-MAX (punto 4)	RUTAS PROPIAS ruta 1: 2-10-11-12-5-2 ruta 2: 2-16-9-15-2 RUTAS TERCERIZADAS ruta 3: 1-8-22-18 ruta 4: 1-21-19 ruta 5: 1-23-17 ruta 6: 3-13-20-6 ruta 7: 3-14 ruta 8: 4-24-7	

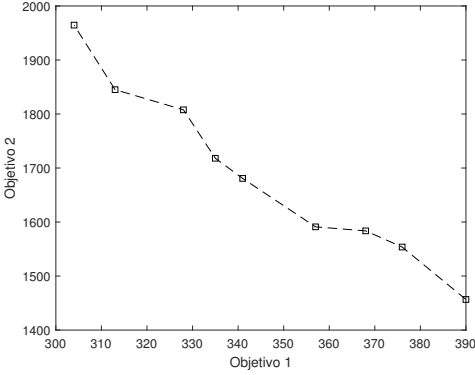
Cuadro 4: Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes cero grados

Caso 5°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	RUTAS PROPIAS ruta 1: 1-23-17-1 ruta 2: 2-10-11-12-5-2 ruta 3: 3-14-19-21-16-9-3 ruta 4: 3-15-6-20-13-3 RUTAS TERCERIZADAS ruta 5: 1-8-22-18 ruta 6: 4-24-7	

Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 2	RUTAS PROPIAS RUTAS TERCERIZADAS ruta 1: 1-8-22 ruta 2: 1-21-19 ruta 3: 1-23-17 ruta 4: 2-10-18 ruta 5: 2-16-9 ruta 6: 3-13-20-15 ruta 7: 3-14 ruta 8: 4-6-5-12-11 ruta 9: 4-24-7	
Punto por MIN-MAX (punto 4)	RUTAS PROPIAS ruta 1: 2-10-11-12-5-2 ruta 2: 2-16-9-15-2 RUTAS TERCERIZADAS ruta 3: 1-8-22-18 ruta 4: 1-21-19 ruta 5: 1-23-17 ruta 6: 3-13-20-6 ruta 7: 3-14 ruta 8: 4-24-7	

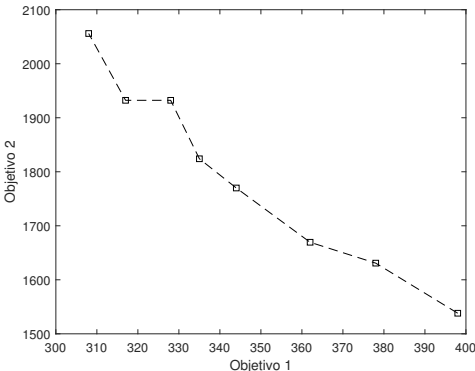
Cuadro 5: Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes cinco grados

Caso 10°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	RUTAS PROPIAS ruta 1: 1-17-23-1 ruta 2: 2-5-12-11-10-2 ruta 3: 3-14-19-21-16-9-3 ruta 4: 3-15-6-20-13-3 RUTAS TERCERIZADAS ruta 5: 1-8-22-18 ruta 6: 4-24-7	
Extremo 2	RUTAS PROPIAS RUTAS TERCERIZADAS ruta 1: 1-8-22 ruta 2: 1-21-19 ruta 3: 1-23-17 ruta 4: 2-10-18 ruta 5: 2-15-5-12-11 ruta 6: 2-16-9 ruta 7: 3-13-20-6 ruta 8: 3-14 ruta 9: 4-24-7	
Punto por MIN-MAX (punto 4)	RUTAS PROPIAS ruta 1: 2-10-11-12-5-2 ruta 2: 2-16-9-15-2 RUTAS TERCERIZADAS ruta 3: 1-8-22-18 ruta 4: 1-21-19 ruta 5: 1-23-17 ruta 6: 3-13-20-6 ruta 7: 3-14	

Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
	ruta 8: 4-24-7	

Cuadro 6: Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes diez grados

Caso 15°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 1-23-17-1</p> <p>ruta 2: 2-10-11-12-5-2</p> <p>ruta 3: 3-13-20-6-15-3</p> <p>ruta 4: 3-14-19-21-16-9-3</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 5: 1-8-22-18</p> <p>ruta 6: 4-24-7</p>	
Extremo 2	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 1: 1-8-22</p> <p>ruta 2: 1-21-19</p> <p>ruta 3: 1-23-17</p> <p>ruta 4: 2-10-18</p> <p>ruta 5: 2-16</p> <p>ruta 6: 3-9</p> <p>ruta 7: 3-13-20-15</p> <p>ruta 8: 3-14</p> <p>ruta 9: 4-6-5-12-11</p> <p>ruta 10: 4-24-7</p>	

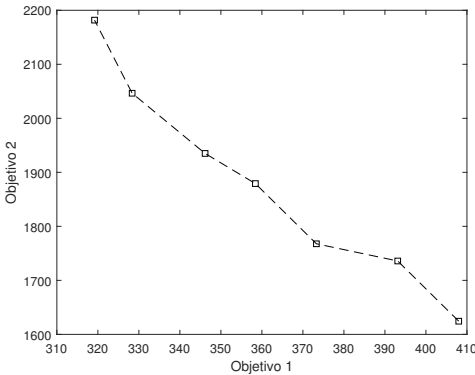
Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Punto por MIN-MAX (punto 3)	RUTAS PROPIAS ruta 1: 2-10-11-12-5-2 ruta 2: 3-13-20-15-9-3 RUTAS TERCERIZADAS ruta 3: 1-8-22-18 ruta 4: 1-21-19 ruta 5: 1-23-17 ruta 6: 2-16 ruta 7: 3-14 ruta 8: 4-6 ruta 9: 4-24-7	

Cuadro 7: Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes quince grados

Caso 20°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	RUTAS PROPIAS ruta 1: 1-17-23-1 ruta 2: 2-5-12-11-10-2 ruta 3: 3-9-16-21-19-14-3 ruta 4: 3-15-6-20-13-3 RUTAS TERCERIZADAS ruta 5: 1-8-22-18 ruta 6: 4-24-7	

Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 2	RUTAS PROPIAS	
	RUTAS TERCERIZADAS	
	ruta 1: 1-8-22	
	ruta 2: 1-21-19	
	ruta 3: 1-23-17	
	ruta 4: 2-5-12-11	
	ruta 5: 2-10-18	
	ruta 6: 2-16-9	
	ruta 7: 3-13-20-6-15	
ruta 8: 3-14		
ruta 9: 4-24-7		
Punto por MIN-MAX (punto 3)	RUTAS PROPIAS	
	ruta 1: 2-10-11-12-5-2	
	ruta 2: 2-16-9-15-2	
	RUTAS TERCERIZADAS	
	ruta 3: 1-8-22-18	
	ruta 4: 1-21-19	
	ruta 5: 1-23-17	
	ruta 6: 3-13-20-6	
	ruta 7: 3-14	
ruta 8: 4-24-7		

Cuadro 8: Ruteo y frente obtenidos para caso de 20 clientes veinte grados

Resultados para la instancia de 30 clientes 4 depósitos.

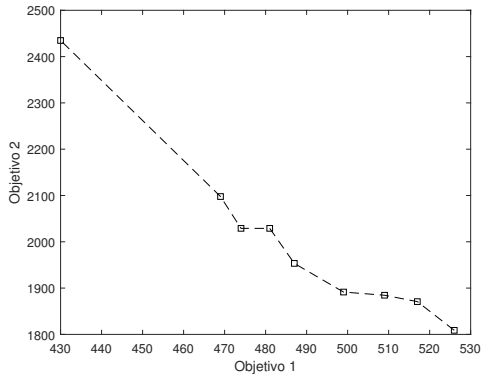
instancia GMDVRPPC_30_P01 tomada de Cordeau et al. (1997)					
Caso	Puntos del frente	Ψ_1 (costos)	Ψ_2 impacto($KgCO_2$)	Mejor punto por MIN-MAX	Tiempo (segundos)
0°	Extremo 1	430	2434.81	punto 6	57232
	Extremo 2	517	1808.79		0
	1	517	1870.79		35
	2	509	1884.55		81
	3	499	1891.44		129
	4	487	1953.33		566
	5	481	2028.98		5171
	6	474	2028.99		3610
	7	469	2097.76		30462
5°	Extremo 1	435	2501.09	punto 7	83872
	Extremo 2	528	1897.36		0
	1	519	1962.03		54
	2	509	1983.6		122
	3	503	1990.79		250
	4	494	2055.47		805
	5	490	2055.47		1501
	6	484	2134.52		6104
	7	478	2134.53		15577
	8	468	2220.76		152498
10°	Extremo 1	438	2621.98	punto 6	90635
	Extremo 2	517	2001.96		0
	1	527	2069.19		58
	2	517	2091.6		38
	3	511	2099.08		179
	4	502	2166.3		501
	5	498	2166.3		917

Continúa en la siguiente página.

Caso	Puntos del frente	Ψ_1 (costos)	Ψ_2 impacto($KgCO_2$)	Mejor punto por MIN-MAX	Tiempo (segundos)
	6	485	2248.48		10076
	7	475	2330.63		83196
	8	469	2338.11		73098
15°	Extremo 1	439	2805		96455
	Extremo 2	542	2094.61		0
	1	534	2171.9		21
	2	522	2187.36		70
	3	515	2249.2	punto 6	455
	4	510	2280.1		717
	5	502	2326.48		2796
	6	491	2357.4		6256
	7	482	2473.32		89555
	8	476	2481.05		91619
20°	Extremo 1	454	2938.27		150785
	Extremo 2	564	2245.51		0
	1	555	2325.13		75
	2	548	2356.97		78
	3	539	2364.94	punto 8	181
	4	535	2436.6		1645
	5	530	2444.56		2118
	6	524	2484.38		3061
	7	511	2532.16		5859
	8	504	2564.00		14844

Cuadro 9: Resultados del GMDVRPPC-30 clientes

En las siguientes tablas se anexan los frentes de pareto por cada caso de inclinación, y se exponen las rutas de cada punto representativo del frente.

Caso 0°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 1-23-17-22-21-1</p> <p>ruta 2: 2-28-27-11-30-12-2</p> <p>ruta 3: 3-9-19-14-34-13-3</p> <p>ruta 4: 4-20-15-5-26-32-7-4</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 5: 1-8</p> <p>ruta 6: 2-16</p> <p>ruta 7: 2-31-10-18-29</p> <p>ruta 8: 4-24</p> <p>ruta 9: 4-25</p> <p>ruta 10: 4-33-6</p>	
Extremo 2	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 1: 1-8-22</p> <p>ruta 2: 1-17-29-18</p> <p>ruta 3: 1-21-19</p> <p>ruta 4: 1-23</p> <p>ruta 5: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 6: 2-16-9</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-13-20-15</p> <p>ruta 9: 3-14</p> <p>ruta 10: 3-34</p> <p>ruta 11: 4-24-7-32</p> <p>ruta 12: 4-25</p> <p>ruta 13: 4-3-6</p>	

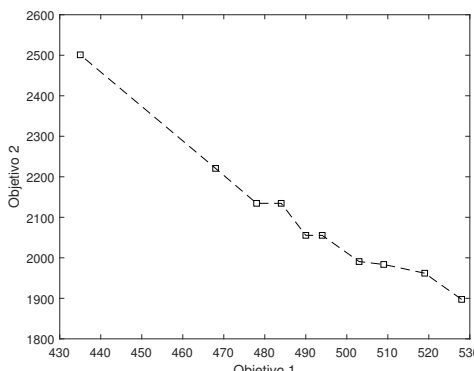
Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Punto por MIN-MAX (punto 6)	RUTAS PROPIAS ruta 1: 3-9-16-21-19-14-3 ruta 2: 4-33-6-15-20-25-4 RUTAS TERCERIZADAS ruta 3: 1-8-22 ruta 4: 1-17-29-18 ruta 5: 1-23 ruta 6: 2-10-28-27-11 ruta 7: 2-31-5-26-12-30 ruta 8: 3-13-34 ruta 9: 4-24-7-32	

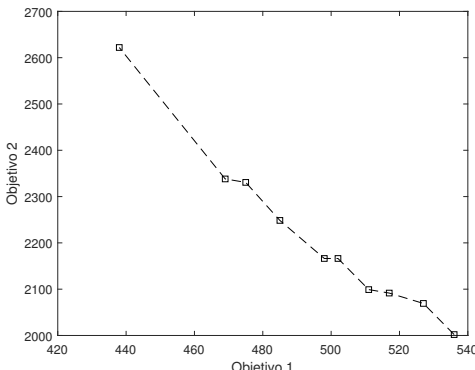
Cuadro 10: Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes cero grados

Caso 5°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	RUTAS PROPIAS ruta 1: 1-21-8-29-17-23-1 ruta 2: 2-5-26-32-30-12-31-2 ruta 3: 3-9-19-14-34-13-3 ruta 4: 4-33-6-15-20-25-4 RUTAS TERCERIZADAS ruta 5: 1-22-18-28 ruta 6: 2-10-27-11 ruta 7: 2-16 ruta 8: 4-24-7	

Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto																						
Extremo 2	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 1: 1-8-22</p> <p>ruta 2: 1-17-29-18</p> <p>ruta 3: 1-21-19</p> <p>ruta 4: 1-23</p> <p>ruta 5: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 6: 2-16-9</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-13-20-15</p> <p>ruta 9: 3-14</p> <p>ruta 10: 3-34</p> <p>ruta 11: 4-24-7-32</p> <p>ruta 12: 4-25</p> <p>ruta 13: 4-3-6</p>	 <table><caption>Datos del Frente de Pareto</caption><thead><tr><th>Objetivo 1</th><th>Objetivo 2</th></tr></thead><tbody><tr><td>435</td><td>2500</td></tr><tr><td>470</td><td>2220</td></tr><tr><td>480</td><td>2140</td></tr><tr><td>485</td><td>2130</td></tr><tr><td>490</td><td>2060</td></tr><tr><td>495</td><td>2050</td></tr><tr><td>505</td><td>2000</td></tr><tr><td>510</td><td>1990</td></tr><tr><td>520</td><td>1970</td></tr><tr><td>525</td><td>1900</td></tr></tbody></table>	Objetivo 1	Objetivo 2	435	2500	470	2220	480	2140	485	2130	490	2060	495	2050	505	2000	510	1990	520	1970	525	1900
Objetivo 1	Objetivo 2																							
435	2500																							
470	2220																							
480	2140																							
485	2130																							
490	2060																							
495	2050																							
505	2000																							
510	1990																							
520	1970																							
525	1900																							
Punto por MIN-MAX (punto 7)	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 3-9-16-21-19-14-3</p> <p>ruta 2: 4-33-6-15-20-25-4</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 3: 1-8-22</p> <p>ruta 4: 1-17-29-18</p> <p>ruta 5: 1-23</p> <p>ruta 6: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-13</p> <p>ruta 9: 3-34</p> <p>ruta 10: 4-24-7-32</p>																							

Cuadro 11: Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes cinco grados

Caso 10°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 1-23-17-29-21-1</p> <p>ruta 2: 2-5-26-12-30-11-27-2</p> <p>ruta 3: 3-9-19-14-34-13-3</p> <p>ruta 4: 4-33-6-15-20-25-4</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 5: 1-8-22</p> <p>ruta 6: 2-16</p> <p>ruta 7: 2-31-10-18-28</p> <p>ruta 8: 4-24-7-32</p>	
Extremo 2	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 1: 1-8-22</p> <p>ruta 2: 1-17-29-18</p> <p>ruta 3: 1-21-19</p> <p>ruta 4: 1-23</p> <p>ruta 5: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 6: 2-16-9</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-13-20-15</p> <p>ruta 9: 3-14</p> <p>ruta 10: 3-34</p> <p>ruta 11: 4-24-7-32</p> <p>ruta 12: 4-25</p> <p>ruta 13: 4-33-6</p>	

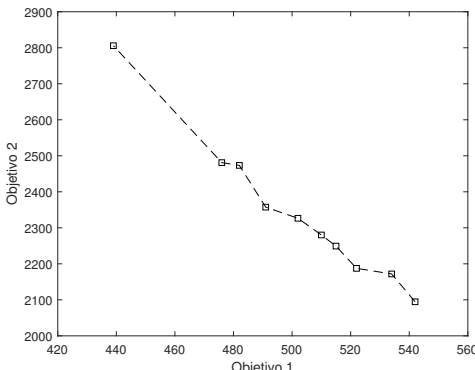
Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Punto por MIN-MAX (punto 6)	RUTAS PROPIAS ruta 1: 3-9-16-21-19-14-3 ruta 2: 4-33-6-15-20-25-4 RUTAS TERCERIZADAS ruta 3: 1-8-22 ruta 4: 1-17-29-18 ruta 5: 1-23 ruta 6: 2-10-28-27-11 ruta 7: 2-31-5-26-12-30 ruta 8: 3-13 ruta 9: 3-34 ruta 10: 4-24-7-32	

Cuadro 12: Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes diez grados

Caso 15°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	RUTAS PROPIAS ruta 1: 2-5-26-32-12-30-11-2 ruta 2: 2-31-10-27-28-18-2 ruta 3: 3-13-34-14-19-21-9-3 ruta 4: 4-33-6-15-20-25-4 RUTAS TERCERIZADAS ruta 5: 1-8-22-29 ruta 6: 1-23-17 ruta 7: 2-16 ruta 8: 4-24-7	

Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 2	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 1: 1-8-22</p> <p>ruta 2: 1-17-29-18</p> <p>ruta 3: 1-21-19</p> <p>ruta 4: 1-23</p> <p>ruta 5: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 6: 2-16</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-9</p> <p>ruta 9: 3-13-20-6-15</p> <p>ruta 10: 3-14</p> <p>ruta 11: 3-34</p> <p>ruta 12: 4-24-7-32</p> <p>ruta 13: 4-33-25</p>	
Punto por MIN-MAX (punto 6)	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 3-9-16-21-19-14-3</p> <p>ruta 2: 4-33-6-15-20-25-4</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 3: 1-8-22</p> <p>ruta 4: 1-17-29-18</p> <p>ruta 5: 1-23</p> <p>ruta 6: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-13</p> <p>ruta 9: 3-34</p> <p>ruta 10: 4-24-7-32</p>	

Cuadro 13: Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes quince grados

Caso 20°		
Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Extremo 1	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 2-5-26-12-30-11-27-2</p> <p>ruta 2: 2-18-29-28-10-2</p> <p>ruta 3: 3-13-9-16-21-19-14-3</p> <p>ruta 4: 4-25-20-15-6-33-4</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 5: 1-8-22</p> <p>ruta 6: 1-23-17</p> <p>ruta 7: 2-31</p> <p>ruta 8: 3-34</p> <p>ruta 9: 4-24-7-32</p>	
Extremo 2	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 1: 1-8-22</p> <p>ruta 2: 1-17-29-18</p> <p>ruta 3: 1-21-19</p> <p>ruta 4: 1-23</p> <p>ruta 5: 2-10-28-27-11</p> <p>ruta 6: 2-16-9</p> <p>ruta 7: 2-31-5-26-12-30</p> <p>ruta 8: 3-13-20-6-15</p> <p>ruta 9: 3-14</p> <p>ruta 10: 3-34</p> <p>ruta 11: 4-24-7-32</p> <p>ruta 12: 4-33-25</p>	

Sigue en la página siguiente.

Puntos clave del frente	Ruteo	Frente de pareto
Punto por MIN-MAX (punto 8)	<p>RUTAS PROPIAS</p> <p>ruta 1: 2-27-11-30-12-26-5-2</p> <p>ruta 2: 4-33-6-15-20-25-4</p> <p>RUTAS TERCERIZADAS</p> <p>ruta 3: 1-8-22-29</p> <p>ruta 4: 1-21-19</p> <p>ruta 5: 1-23-17</p> <p>ruta 6: 2-16-9</p> <p>ruta 7: 2-31-10-18-28</p> <p>ruta 8: 3-13</p> <p>ruta 9: 3-34</p> <p>ruta 10: 3-34</p> <p>ruta 11: 4-24-7-32</p>	

Cuadro 14: Ruteo y frente obtenidos para caso de 30 clientes veinte grados

6.1. Análisis de resultados

Como se puede observar en las tablas 3 y 9 para los casos de 20 y 30 clientes respectivamente, un incremento en la pendiente ocasiona un aumento en el número de partículas emitidas al ambiente y el costo operativo, por lo cual sus soluciones óptimas son sensibles frente a inclinaciones considerables en la vía. Para el caso de pendientes inferiores al 2 % no se puede afirmar una ocurrencia de cambio en el costo operativo, ya que al depender de la distancia entre dos puntos, esta se puede mantener en un margen estable o no, dependiendo del parámetro de sensibilidad utilizado para corregirla por el efecto de la pendiente que para este caso es $\frac{1}{\cos \beta_{ij}}$. El análisis de rutas se hace comparando los puntos MIN-MAX o de equilibrio para los casos de 20 y 30 clientes.

Rutas del MIN-MAX para el caso de 20 clientes.

La figura 13 muestra las rutas para el punto MIN-MAX 4 a cero grados, punto MIN-MAX 4 a cinco grados, punto MIN-MAX 4 a 10 grados y punto MIN-MAX 3 a 20 grados, y la figura 14 las rutas para el punto MIN-MAX 3 a 15 grados.

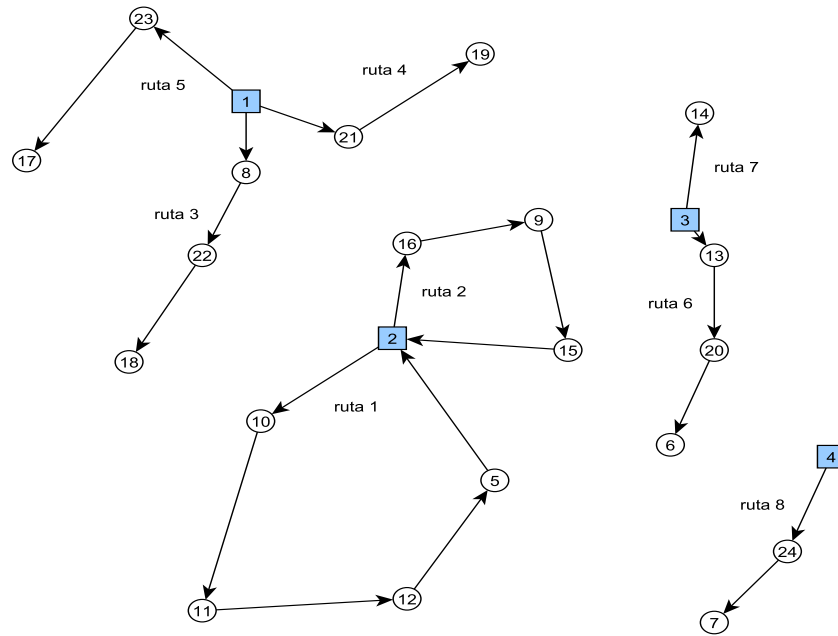


Figura 13: Rutas de los puntos MIN-MAX a 0°, 5°, 10° y 20° (caso 20 clientes 4 depósitos).

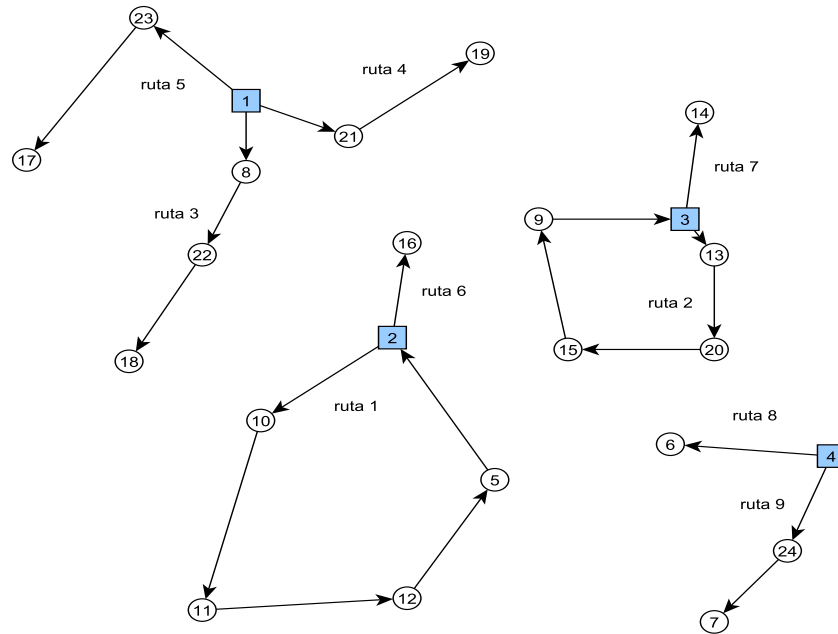


Figura 14: Rutas de punto MIN-MAX a 15° (caso 20 clientes 4 depósitos).

Ambas figuras presentan resultados muy poco frecuentes y contradictorios, ya que para una inclinación de veinte grados se esperaría un número mayor de vehículos y no lo contrario. Sin embargo este resultado puede presentarse por tres razones.

1. El punto MIN-MAX no está muy bien equilibrado, lo que implica que el número de rutas puede aumentar o disminuir dependiendo del objetivo mas desequilibrado. Para solucionar este problema se recomienda hacer divisiones pequeñas en el rango de solución de ambos objetivos, y através del $\varepsilon - constraint$ encontrar mas soluciones intermedias del frente lo suficientemente cercanas a la de equilibrio. Si el caso anterior no funciona, entonces se recomienda el método de $\varepsilon - constraint$ aumentado [Mavrotas \(2009\)](#).
2. La instancia es pequeña. Para instancias de menor tamaño es necesario considerar el número de depósitos en relación al número de clientes. Si la proporción es grande entonces el ruteo para grandes pendientes podría ser el mismo que para pendientes pequeñas.
3. Un GAP muy grande para técnicas exactas en un caso de prueba pequeño. Una respuesta con GAP mayor al valor nombrado en un caso de prueba pequeño puede implicar una lejanía del óptimo global del problema, lo que afecta seriamente el número de vehículos usados en la operación.

Rutas del MIN-MAX para el caso de 30 clientes.

En la figura [15](#) se muestra la gráfica de rutas para el punto MIN-MAX 6 a cero grados; la figura [16](#) los puntos MIN-MAX 7 a cinco grados, punto MIN-MAX 6 a 10 grados y punto MIN-MAX 6 a quince grados; y por último la figura [17](#) muestra las rutas del punto MIN-MAX 8 a veinte grados.

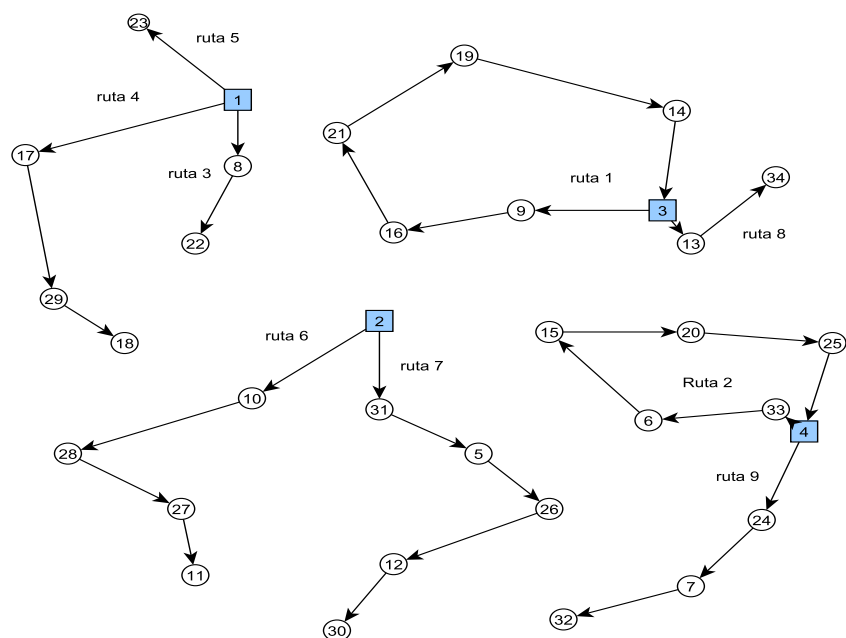


Figura 15: Rutas del punto MIN-MAX a 0° (caso 30 clientes 4 depósitos).

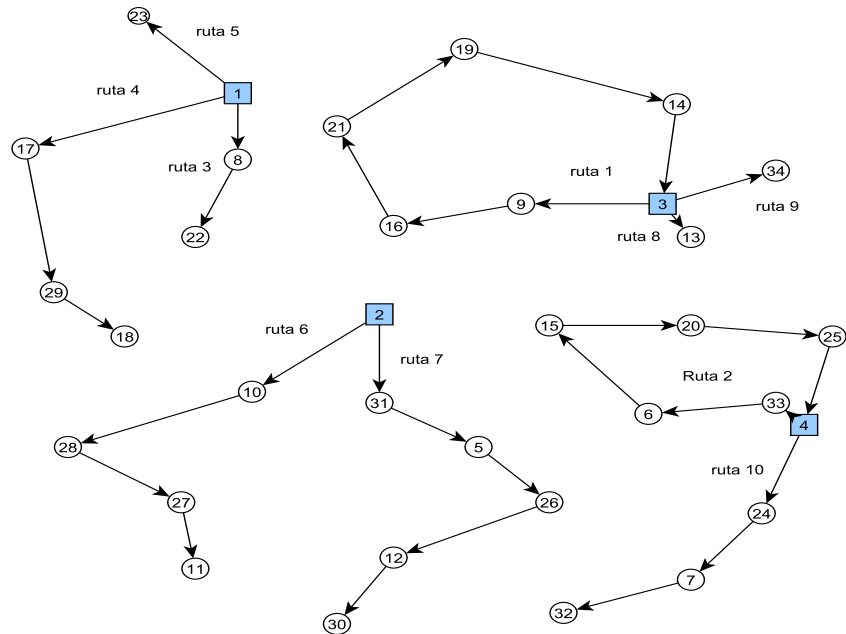


Figura 16: Rutas de los puntos MIN-MAX a 5° , 10° y 15° (caso 30 clientes 4 depósitos).

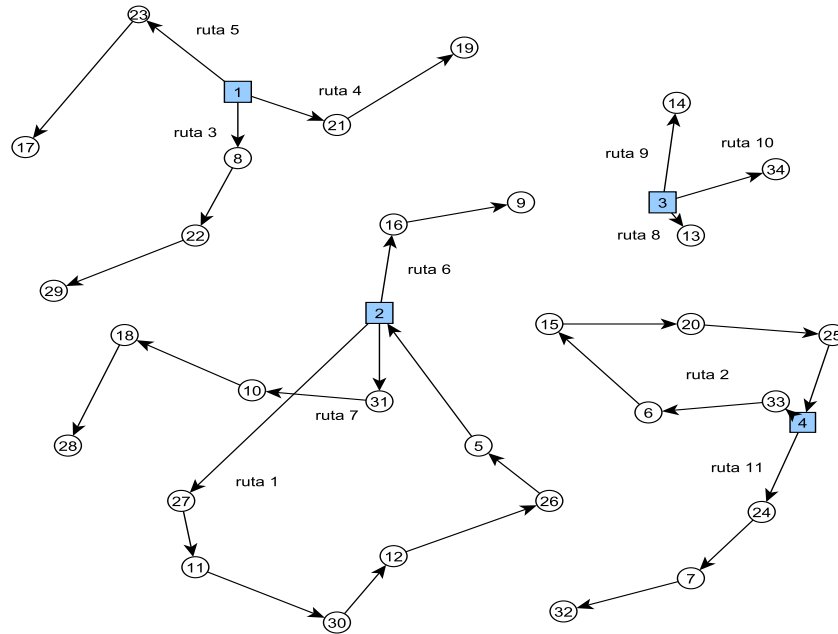


Figura 17: Rutas del punto MIN-MAX a 20° (caso 30 clientes 4 depósitos).

En este caso se puede apreciar una tendencia en el aumento de vehículos a medida que crece la pendiente. Como podemos ver entre cero grados y cinco grados incrementa en uno el número de flotas. Sin embargo entre cinco grados y quince grados el número de flotas se mantiene, con lo cual se afirma que no hay sensibilidad de aumento de vehículos entre los casos nombrados. Cuando la pendiente aumenta al valor de 20 grados, el número de vehículos aumenta en uno y comparando con los casos anteriores los arcos se hacen cortos.

7. Conclusiones, recomendaciones y trabajos futuros

Se plantea un modelo matemático radial para el GMDVRPPC con un enfoque bi-objetivo, minimizando costos de operación y emisiones contaminantes, y modelado como un problema lineal entero-mixto resuelto a través del método epsilon restricciones para problemas multi-objetivo. Al modelo anterior se le aplica un análisis de sensibilidad donde se consideran diferentes grados de inclinación y estados de la vía.

Se verifica la validez del modelo matemático radial tomando instancias de la literatura especializada y se

desarrolla una herramienta para el cálculo de la distancia, teniendo en cuenta la inclinación del arco. El desarrollo se basa en dos alternativas que consisten en modelar el arco con una pendiente constante, y modelarlo en función de la distancia virtual. La primera es la utilizada en esta investigación y posee la ventaja de simular de manera simple la inclinación del arco, pero tiene el inconveniente de no modelar el estado del arco y además, para muchas pendientes se deben construir K casos de estudio. La segunda alternativa es la más viable ya que la distancia se calcula en función del tipo de terreno y permite analizar múltiples pendientes, por lo que solo es necesario constituir un solo caso de estudio, y para poder emplear esta alternativa es necesario modelar el problema como asimétrico y conocer el relieve del arco o las curvas de nivel asociadas. Se recomienda para problemas de la vida real calcular una distancia y ángulo virtual en función del relieve.

Con base en los resultados se determinó que el número de vehículos usados en la operación, el costo operativo y las emisiones de CO₂ tienden a aumentar a medida que la pendiente crece. El aumento en el número de vehículos es apreciable para instancias grandes y para cambios bruscos en la pendiente (mayores o iguales al 7 %).

Un incremento pequeño en la pendiente de la vía no afecta el ruteo. Sin embargo lo anterior no garantiza que el costo y el impacto ambiental se mantengan, pues estos si podrían cambiar ante cambios pequeños (menores al 7 %).

7.1. Trabajos futuros

Se espera que en próximos trabajos los problemas de ruteo puedan ser modelados considerando la asimetría del arco y la topografía de la vía, pudiendo ser a través del modelo de distancia virtual. Por otro lado se espera que además de modelar la vía en función del relieve y tipo de terreno, se lleve en cuenta las curvas asociadas al terreno de estudio, convirtiéndose así en un problema mas aproximado a lo real.

Por otro lado la nueva tendencia en cuanto a las *Smart Cities* no ha sido estudiada en el problema de ruteo, lo que puede conllevar a que en próximas investigaciones se diseñen herramientas para el modelamiento de las ciudades inteligentes en conjunto con el problema de cadena de suministros, teniendo en cuenta el uso de vehículos eléctricos y la ubicación inteligente de centros de carga.

Uno de los temas que cabe mencionar es el problema de puntos desacoplados en el problema de ruteo

abierto, pues en una investigación hecha en [Atefi et al. \(2018\)](#) se demuestra que un cambio de firma arrendataria en un punto de la operación reduce los costos operativos. Con lo anterior se espera que muchas compañías transportadoras en un futuro puedan contemplar la opción de subcontratar un paquete de flota de vehículos con determinada firma y posteriormente esta pueda hacer cambio de arrendatario en un momento dado de la operación.

8. Bibliografía

Referencias

- Atefi, R., Salari, M., C. Coelho, L., and Renaud, J. (2018). The open vehicle routing problem with decoupling points. *European Journal of Operational Research*, 265(1):316–327.
- Bektas, T. and Laporte, G. (2011). The pollution-routing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(8):1232–1250.
- Brandão, J. (2004). A tabu search algorithm for the open vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 157(3):552–564.
- CÁCERES, N., BARÁN, B., & VIVEROS, E. C. (2004). Algoritmo evolutivo multiobjetivo con corrección de radialidad para la reconfiguración de sistemas eléctricos de distribución n. In *Congresso Brasileiro de Automática*.
- Carciente, J. (1980). *Carreteras estudio y proyecto*. Vega, 2 edition.
- Contardo, C. and Martinelli, R. (2014). A new exact algorithm for the multi-depot vehicle routing problem under capacity and route length constraints. *Discrete Optimization*, 12(1):129–146.
- Cordeau, J.-F., Gendreau, M., and Laporte, G. (1997). A tabu search heuristic for periodic and multi-depot vehicle routing problems. *Networks*, 30(2):105–119.
- Dantzig, G. B. and Ramser, J. H. (1959). The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 6(1):80–91.
- Erdoğan, S. and Miller-Hooks, E. (2012). A Green Vehicle Routing Problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48(1):100–114.
- Fleszar, K., Osman, I. H., and Hindi, K. S. (2009). A variable neighbourhood search algorithm for the open vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 195(3):803–809.
- Fu, Z., Eglese, R., and Li, L. Y. O. (2005). A new tabu search heuristic for the open vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 56(3):267–274.

- Galindres Guancha, L. F., Toro Ocampo, E. M., and Escobar Zuluaga, A. (2015). Solución del problema de ruteo capacitado considerando efectos ambientales mediante una técnica híbrida. *Scientia Et Technica*, 20(3):207–216.
- Gang, H., Zhijing, G., Peng, Y., and Junqing, S. (2016). Vehicle routing problem with simultaneous pickups and deliveries and time windows considering fuel consumption and carbon emissions. In *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 3000–3005. IEEE.
- Gárdenas Grisales, J. (2013). *Diseño geométrico de carreteras*. Ecoe Ediciones, Bogotá, segunda ed edition.
- HAIMES YV, LASDON LS, and WISMER DA (1971). On a bicriterion formation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-1(3):296–297.
- Hao, G., Gou, Z., Yang, P., and Sun, J. (2016). Vehicle routing problem with simultaneous pickups and deliveries and time windows considering fuel consumption and carbon emissions. *Proceedings of the 28th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2016*, pages 3000–3005.
- Ho, W., Ho, G. T. S., Ji, P., and Lau, H. C. W. (2008). A hybrid genetic algorithm for the multi-depot vehicle routing problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(4):548–557.
- Kuo, Y. (2010). Using simulated annealing to minimize fuel consumption for the time-dependent vehicle routing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 59:157–165.
- Lalla-Ruiz, E., Expósito-Izquierdo, C., Taheripour, S., and Voß, S. (2016). An improved formulation for the multi-depot open vehicle routing problem. *OR spectrum*, 38(1):175–187.
- Lavorato, M., Franco, J. F., Rider, M. J., and Romero, R. (2012). Imposing radiality constraints in distribution system optimization problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 27(1):172–180.
- Letchford, A. N., Lysgaard, J., and Eglese, R. W. (2007). A branch-and-cut algorithm for the capacitated open vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 58(12):1642–1651.
- Li, F., Golden, B., and Wasil, E. (2007). The open vehicle routing problem: Algorithms, large-scale test problems, and computational results. *Computers & Operations Research*, 34(10):2918–2930.
- Liu, R., Jiang, Z., and Geng, N. (2014). A hybrid genetic algorithm for the multi-depot open vehicle routing problem. *OR spectrum*, 36(2):401–421.

- Lopez, L., Hincapié, R., and R., G. (2011). Planeamiento multiobjetivo de sistemas de distribución usando algoritmos evolutivo NSGA-II. *Revista ELA*, 8(15):141–151.
- Mavrotas, G. (2009). Effective implementation of the ϵ -constraint method in Multi-Objective Mathematical Programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, 213(2):455–465.
- Peñuela Meneses, C. A. and Granada Echeverri, M. (2007). Optimización multiobjetivo usando un algoritmo genético y un operador elitista basado en un ordenamiento no-dominado (NSGA-II). *Scientia Et Technica*, XIII(35):175–180.
- Pichka, K., Ashjari, B., Ziaefar, A., and Nickbeen, P. (2014). Open vehicle routing problem optimization under realistic assumptions. *International Journal of Research in Industrial Engineering*, 3(2):46–55.
- Rodriguez, A., Ordóñez, A., and Ordoñez, H. (2015). Energy consumption optimization for sensor networks in the IoT. In *2015 IEEE Colombian Conference on Communications and Computing, COLCOM 2015 - Conference Proceedings*, pages 1–6. IEEE.
- Romilly, P. (1999). Substitution of bus for car travel in urban Britain: an economic evaluation of bus and car exhaust emission and other costs. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 4(2):109–125.
- Sariklis, D. and Powell, S. (2000). A heuristic method for the open vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 51(5):564–573.
- Soto, M., Sevaux, M., Rossi, A., and Reinholz, A. (2017). Multiple neighborhood search, tabu search and ejection chains for the multi-depot open vehicle routing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 107:211–222.
- Surekha, P. and Sumathi, S. (2011). Solution To Multi-Depot Vehicle Routing Problem Using Genetic Algorithms. *World Applied Programming*, (13):118–131.
- Tarantilis, C. D., Ioannou, G., Kiranoudis, C. T., and Prastacos, G. P. (2005). Solving the open vehicle routeing problem via a single parameter metaheuristic algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, 56(5):588–596.

- Tavares, G., Zsigraiova, Z., Semiao, V., and da Graça Carvalho, M. (2008). A case study of fuel savings through optimisation of MSW transportation routes. *Management of Environmental Quality: An International Journal*, 19(4):444–454.
- Toro O., E. M., Escobar Z., A. H., and Granada E., M. (2015). LITERATURE REVIEW ON THE VEHICLE ROUTING PROBLEM IN THE GREEN TRANSPORTATION CONTEXT. *Luna Azul*, (42):362–387.
- Toro-ocampo, E. M. (2016). *Solución del problema de localización y ruteo usando un modelo matemático flexible y considerando efectos ambientales*. PhD thesis, Universidad Tecnológica de Pereira.
- Toro-Ocampo, E. M., Franco-Baquero, J. F., and Gallego-Rendón, R. A. (2016). Modelo matemático para resolver el problema de localización y ruteo con restricciones de capacidad considerando flota propia y subcontratada. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 17(3):357–369.
- Toth, P. and Vigo, D. (2002). *THE VEHICLE ROUTING PROBLEM Editorial Board Evaluation and Optimization of Electoral Systems*.
- Trigeorgis, L. and Mason, S. P. (1987). Valuing managerial flexibility. *Midland corporate finance journal*, 5(1):14–21.
- Wang, X., Choi, T.-M., Liu, H., and Yue, X. (2016). A novel hybrid ant colony optimization algorithm for emergency transportation problems during post-disaster scenarios. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*.
- Wyatt, D. W., Li, H., and Tate, J. E. (2014). The impact of road grade on carbon dioxide (CO₂) emission of a passenger vehicle in real-world driving. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 32:160–170.